



PIECES
QUI ONT REMPORTÉ
LE PRIX
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
EN M. DCC. XLVII.

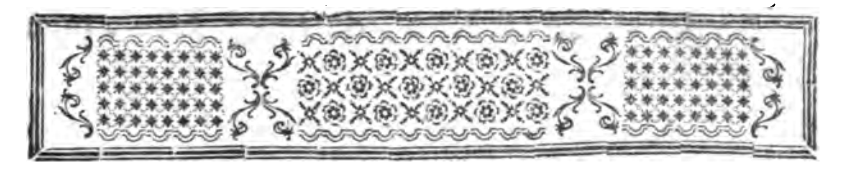
Sur la meilleure maniere de trouver l'heure en Mer.

Selon la fondation faite par feu M. ROUILLÉ DE MESLAY, ancien Conseiller au Parlement.



A PARIS, rue S. Jacques.
Chez GABR. MARTIN, J. B. COIGNARD, & H. L. GUERIN, Libraires.

M. DCC. L.



AVERTISSEMENT.

L'ACADEMIE avoit proposé pour sujet du Prix de 1745, *La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observation, soit dans le jour, soit dans le crépuscule, & surtout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.* Mais n'étant pas entierement satisfaite des Pieces qui lui avoient été adressées, elle n'en couronna aucune, & proposa une seconde fois le même sujet pour cette année, avec un Prix double, c'est-à-dire, de 4000 liv. dans la vûe de donner aux Sçavans le loisir de composer de nouvelles Pieces, ou de suppléer ce qui manquoit à celles qu'ils avoient déja envoyées.

L'Académie a vû le succès de ce délai. Parmi les Pieces qu'elle a reçûes, il s'en est trouvé deux qui lui ont paru avoir un droit égal au Prix.

La premiere est la Piece N° 2, de celles qui avoient concouru en 1745, & à laquelle l'Auteur a joint un supplément pour cette année. La Devise est:

Et quandoque olitor fuit opportuna locutus.

Elle est de M. Daniel Bernoulli, Professeur en Medecine en l'Université de Bâle.

La deuxieme est N° 2, de 1747. Elle a pour Devise :

Arbor non uno sternitur ictu.

L'Auteur ne s'est pas encore fait connoître.

Quoique ces deux Pieces soient remplies de recherches très-curieuses, & de vûes, qui, perfectionnées, pourroient être utiles à la Navigation, cependant l'Académie se croit obligée de renouveller la déclaration qu'elle a faite en diverses autres occasions, qu'en couronnant les Pieces qui méritent le Prix, elle ne pretend pas adopter généralement tout ce qui y est contenu.

Dans le nombre des autres Pieces qui ont concouru, il y en a trois dans lesquelles on a trouvé des machines ou des vûes utiles, & qui ont à cet égard, mérité les éloges de l'Académie.

La premiere est N° 4, de 1745, avec son addition. La Devise est :

Nihil umquam invenietur, si contenti fuerimus inventis.

La deuxieme est N° 5, de 1745, qui a pour Devise :

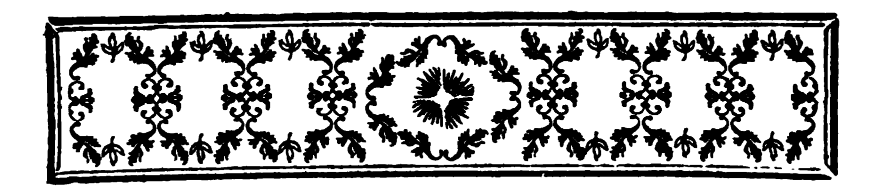
Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

Et la troisieme est N° 1, de 1747, dont la Devise est :

Semper id melius quod optimo propinquius est.

L'Académie propose pour le sujet du Prix qu'elle donnera à Pâques 1749 :

La meilleure maniere de déterminer en mer les Courans ; leur force & leur direction.



CATALOGUE

des Ouvrages contenus dans ce Recueil.

PIECES de 1745 & 1747.



RECHERCHES
MECHANIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

Sur la Queſtion propoſée par l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1745.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par obſervation, ſoit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.

Et quandoque Oliter fuit opportuna locutus.

Par M. DANIEL BERNOULLI, des Acad. des Sciences de Paris, de Londres, de Peterſbourg, de Bologne, &c. & Profeſſeur de Médecine en l'Univerſité de Baſle.

Prix. 1745.



RECHERCHES MÉCHANIQUES ET ASTRONOMIQUES,

Sur la Queſtion propoſée par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1745.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par obſervation, ſoit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.

Et quandoque Olitor fuit opportuna locutus.

AVANT-PROPOS.

LE plus grand nombre des Obſervations Aſtronomiques, demandent une exacte meſure du tems & des hauteurs verticales des Aſtres: c'eſt pourquoi on s'eſt appliqué avec un ſoin extreme à mettre dans la derniere perfection poſſible les

inſtrumens qui ſervent à ces meſures, & on peut dire qu'on y a réuſſi au-delà des eſpérances qu'on auroit oſé concevoir auparavant : mais malheureuſement pour la navigation, ces mêmes inſtrumens ne ſont preſque plus d'aucun uſage pour les obſervations ſur mer. M. Huguens, le premier Auteur des Oſcillations cycloïdiques des Pendules, a cru que moyennant une certaine façon de ſuſpendre les horloges, marquée dans ſon *Horologium oſcillatorium*, elles pourroient ſervir ſur mer avec preſque autant de juſteſſe que ſur terre : mais quand il n'auroit point été réfuté par l'expérience, la ſeule théorie auroit ſuffi pour démontrer la grande imperfection des Pendules en mer, & même leur inutilité abſolue, lorſque le vaiſſeau ſeroit fort agité ; ce que je ferai voir en paſſant dans mon Mémoire. Quant aux obſervations des hauteurs apparentes des aſtres, elles ſouffrent des difficultés pour le moins auſſi grandes, puiſqu'il n'eſt pas poſſible de connoître exactement la direction verticale ou horiſontale. On a tâché de remédier à ce terrible inconvénient, en prenant pour la direction horiſontale la ligne viſuelle, qui raſe la ſurface de la mer : mais cet expédient, déja fort imparfait par lui-même, n'a plus lieu lorſqu'on ne voit pas l'horiſon ; c'eſt cependant ce cas qui fait la principale partie de la queſtion propoſée par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1745, & conçue en ces termes : *Donner la meilleure maniere de trouver l'heure en mer, par obſervation, ſoit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.* Il me ſemble donc que la queſtion de l'Académie revient principalement, ſinon uniquement à celle-ci : Quelle ſeroit la meilleure maniere de connoître en mer la direction horiſontale la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon. De cette queſtion dépend abſolument la meſure des hauteurs verticales ; & de celle-

ci, la maniere de trouver l'heure en mer. Je ne prétend pas de pouvoir satisfaire à cette question fondamentale avec une entiere précision, & la chose sera sans doute impossible : la meilleure méthode sera la moins imparfaite. Ce que je puis assurer par avance, est que j'ai examiné cet article avec toute l'attention nécessaire, selon toutes les loix de méchanique, sans lesquelles on auroit grand tort de hasarder aucune conjecture, quelque fondée qu'elle paroisse ; j'en parle par expérience, étant revenu de plusieurs idées que je m'étois formées là-dessus autrefois, & que je croyois assez bonnes alors. J'ai examiné l'effet de la pesanteur qui tend à donner aux corps une certaine direction ; celui de l'inertie, qui fait que les corps entraînés par un point se détournent de leur position naturelle; celui du mouvement des lames sur les vaisseaux ; & enfin celui des agitations du vaisseau sur les corps qui y sont suspendus. De-là il m'a paru qu'il étoit possible d'assujettir les variations des directions à de certaines loix, & qu'on pouvoit se servir de ces loix pour connoître à peu près la vraie direction horisontale. J'ai tenu la même route pour examiner le mouvement des horloges oscillatoires en mer, & quelle autre sorte d'horloges marines on pourroit leur substituer, pour connoître la mesure du tems le plus exactement qu'il est possible, puisque sans cette connoissance, notre question seroit tout-à-fait inutile, & que souvent il faut connoître un intervalle de tems pour pouvoir trouver l'heure. Ce n'est qu'après ces recherches préliminaires, que je traiterai des moyens que l'Astronomie nous fournit pour connoître l'heure. Je diviserai donc mon Mémoire en quatre chapitres. Le premier contiendra les recherches Méchaniques qui conviennent à notre sujet. Le second traitera de la perfection des Horloges & des Montres en général, &

des Horloges marines en particulier. Dans le troisieme ; j'examinerai jusqu'où on peut aller dans l'établissement d'une direction horisontale, sans le secours de l'horison visible. Et enfin dans le quatrieme, je donnerai pour les diverses circonstances où l'on peut se trouver, plus ou moins favorables, les meilleures manieres pour trouver l'heure, moyennant le secours des instrumens dont j'aurai donné la description.



CHAPITRE PREMIER.

Contenant les Recherches préliminaires de Méchanique.

§. I.

SI le vaiſſeau alloit ſur mer avec une viteſſe uniforme & d'un mouvement parallele, ce mouvement ne pourroit faire aucun effet, & tout reſteroit dans le même état que ſi le vaiſſeau étoit en repos; un pendule feroit ſes oſcillations avec la même régularité que ſur terre; un corps attaché & ſuſpendu par un fil, retiendroit conſtamment ce fil dans ſa ſituation verticale, & toutes les obſervations pourroient ſe faire avec la même facilité & autant de préciſion que par terre; mais lorſque le vaiſſeau eſt agité, tout cela change de face: ce n'eſt donc point le ſillage qu'il faut conſidérer ici, mais ſimplement les agitations & les balancemens du vaiſſeau; c'eſt pourquoi nous pourrons conſidérer le vaiſſeau comme flottant, mais agité par les lames & par les vents.

§. II.

TOUT corps flottant dans un fluide en repos, a une certaine ſituation d'équilibre, excepté les corps ſphériques & homogenes: s'il eſt détourné de ſa ſituation naturelle, il la reprendra auſſi-tôt qu'il ſera libre de le faire; mais en le faiſant il fera pluſieurs allées & venues; il fera des balancemens de même qu'un pendule ſimple; & il continueroit ſes balancemens ſans fin, ſans pluſieurs

résistances qui les diminuent peu à peu; cependant les grandes & les petites agitations se feront à peu près dans le même tems. M. Euler a proposé le Problème de trouver la longueur du pendule simple isochrone, avec les balancemens d'un corps flottant quelconque: & quoique ce problème soit extremement embrouillé, les solutions qu'on en a données se sont parfaitement rencontrées. Je ne sçaurois entrer ici dans le détail de ces solutions: il me suffira d'en faire remarquer quelques propriétés essentielles à notre sujet.

(*a*) Si le corps flottant est forcé de faire ses balancemens dans un plan donné, le pendule isochrone pour le même corps sera plus ou moins long, suivant le plan des balancemens: ainsi un vaisseau tanguant de la prouë à la pouppe, ne fera pas ces balancemens dans le même tems que le même vaisseau roulant d'un bord à l'autre. On peut remarquer aussi, qu'un corps flottant peut être balancé en même tems dans plusieurs plans, & alors les premiers balancemens sont extremement irréguliers, mais ils deviennent bien-tôt réguliers, & se font ensuite tous avec harmonie, commençant & finissant chacun au même moment, & on peut encore déterminer la longueur du pendule simple isochrone, avec tous ces balancemens, composés après qu'ils sont devenus réguliers.

(*b*) Tous ces balancemens peuvent être réduits à deux classes, desquelles on sçait déterminer les conditions. Dans la premiere classe, le centre de gravité du corps flottant & balançant reste immobile: dans la seconde, le centre de gravité souffre des balancemens lui-même, mais sans sortir de la verticale; il ne fait que monter & descendre alternativement, & toûjours verticalement: un vaisseau qui roule d'un bord à l'autre & également des deux côtés, conserve son centre de gravité au même point

à peu

à peu près : mais s'il étoit couché en même tems sur un de ses côtés, ou s'il tanguoit, son centre de gravité ne sera plus en repos : cependant il restera toûjours dans la même ligne verticale.

(c) Les mêmes propriétés subsisteront, si au lieu des corps flottans on considéroit des corps mûs uniformément ; le sillage ne peut donc déranger sensiblement les balancemens du vaisseau.

(d) Les montées & descentes verticales du centre de gravité seront toûjours fort petites par rapport aux excursions circulaires d'un point éloigné du centre de gravité ; & d'ailleurs elles ne peuvent faire aucun effet sensible sur le corps suspendu dans le vaisseau.

§. III.

Le mouvement des lames est la premiere & principale cause des agitations du vaisseau ; les vents n'y concourent que très-peu, excepté les bouffées ; un vent fait & uniforme ne feroit que pencher le vaisseau, & ne l'agiteroit point, si la surface de la mer restoit unie. Les lames sont formées par des eaux qui montent & descendent alternativement, & ces balancemens des eaux se font suivant les loix des oscillations d'un pendule simple. Les eaux sont agitées jusqu'à une certaine profondeur, au-dessous de laquelle elles sont entierement calmes. Une théorie que je me suis formée là-dessus, indique que la durée d'un ondoyement est isochrone avec l'oscillation d'un pendule simple, dont la longueur est à peu près égale à la profondeur des eaux agitées. Ainsi si la durée d'une lame, depuis sa plus grande élévation jusqu'à son plus grand abbaissement étoit de dix secondes, on en pourroit conclurre que les eaux sont agitées jusqu'à la profondeur

d'environ 306 pieds. La hauteur des lames & leur distance mutuelle, paroît dépendre de la profondeur de la mer & de la force du vent, & leur direction pareillement de celle du vent; d'où je conclus qu'en pleine mer, & lorsque les vents sont faits sans être trop pesans, les lames seront fort semblables, d'une grande étendue en longueur, & paralleles entre elles. Plus les lames, qui sont la principale cause des agitations du vaisseau, sont irrégulieres, plus le vaisseau sera tourmenté & agité irrégulierement.

§. IV.

Il semble d'abord que les agitations du vaisseau ne peuvent qu'être extremement irrégulieres : un vaisseau peut être balancé en tout sens, mais sur-tout de prouë à pouppe, & d'un bord à l'autre; outre ces balancemens, il en souffre encore par rapport à son centre de gravité, qui monte & descend alternativement; il en souffre d'autres, qui sont relatifs au mouvement des lames. Chaque balancement influe l'un sur l'autre, ils se dérangent mutuellement; chacun peut finir & recommencer brusquement.

Nous voyons arriver tout cela dans les premieres oscillations de plusieurs corps attachés & suspendus par le même fil: mais aussi toutes ces oscillations se composeront bien-tôt à un état de permanence & d'harmonie, & alors elles commenceront & finiront toutes au même instant, & ces oscillations composées, ne feront plus que des oscillations simples, uniformes & régulieres. Je pousserai cet exemple plus loin. Prenez par les doigts un bout de fil chargé de poids quelconques, à des distances quelconques; faites avec la main des excussions réciproques, en imitant le plus que vous pourrez le mouvement d'un pendule : & vous verrez tous ces corps enfilés, suivre

parfaitement le mouvement de la main, chacun commençant & finissant ses balancemens avec ceux de la main. On observera la même chose dans les balancemens de toutes les parties d'un systême composé, quelqu'irréguliers qu'ils soient d'abord. Qu'on balance un seul bassin d'une grande balance, & on verra que l'autre bassin, le fléau & toutes les parties se mettront en mouvement, & se composeront à un simple balancement isochrone. Au reste cet état de permanence arrivera tantôt plûtôt, tantôt plus tard, suivant les circonstances, & dans de certains systêmes, il n'arrive que très-difficilement.

§. V.

CES considérations m'ont conduit à ce grand principe, *qui est*, *que dans tout systême composé de tant de parties qu'on voudra, agissant toutes les unes sur les autres, si chaque partie est agitée par des mouvemens oscillatoires réciproques, quelque différentes que soient d'abord ces oscillations entre elles, tous ces mouvemens extrement embrouillés, tendront bien vîte à un mouvement régulier & permanent, auquel étant parvenus, toutes les oscillations commenceront leurs allées & venues au même instant; les unes seront accélérées, & les autres retardées, jusqu'à ce que cela arrive.* Mais comme tout mouvement finit bien-tôt par plusieurs obstacles qu'il rencontre, & qu'il pourroit finir avant que cet état de permanence soit sensible, il faut alors supposer une cause qui entretienne le mouvement, & la supposer constante, uniforme & permanente.

§. VI.

JE ne sçaurois exprimer assez l'utilité de ce principe

dans la Physique méchanique ; la nature ne s'en écarte jamais, elle produit souvent des effets sensibles par des tremoussemens insensibles. Sur ce principe, j'ai réduit au calcul, des phénomenes sur les sons, qui pourroient peut-être paroître inexplicables. Les propriétés principales de la lumiere, doivent se déduire de ce principe. Le calcul de tous les mouvemens sensibles, qu'on peut rapporter à cette classe, s'accorde toûjours merveilleusement avec l'expérience. Sur ces réflexions, je n'ai plus hésité d'employer ce même principe pour expliquer en gros la nature des agitations d'un vaisseau en mer, & pour en tirer tout le fruit qu'il seroit possible, tant pour la perfection & l'usage des Horloges marines, que pour la maniere de connoître la direction horisontale sur mer.

§. VII.

IL est certain que si les lames étoient des sillons d'une grande étendue en longueur, paralleles & parfaitement égaux, si le vaisseau conservoit constamment sa vitesse & sa route, si le vent & la manœuvre restoient parfaitement les mêmes, il est certain, dis-je, que les agitations du vaisseau seroient tout-à-fait régulieres, uniformes, & surtout isochrones avec les balancemens des lames ; quand même le vaisseau seroit agité irrégulierement, il se remettroit bien-tôt dans cet état. J'avoue que ces suppositions sont un peu libres : mais elles ne le sont pas tant qu'on pourroit le croire, & j'en parle par ma propre expérience ; il suffit qu'on se trouve souvent dans le cas de ces suppositions, & pendant des intervalles de tems considérables, & je demande qu'on les saisisse pour faire ses observations. On y peut aussi contribuer beaucoup par la manœuvre assez connue. Dans cet état d'uniformité & de régularité,

le vaiſſeau peut ſouffrir pluſieurs ſortes d'agitations, mais qui ſeront toutes harmonieuſes; & en même tems tout ce qui eſt mobile dans le vaiſſeau fera des allées & venues correſpondantes. Des fluides dans des vaſes, d'autres dans des tuyaux communiquans; des pendules ſimples ou compoſés, quelque inégaux qu'ils ſoient, & dans quelque plan qu'ils puiſſent balancer des lames à reſſort qui ſe courberoient, & tel autre ſorte de mouvement qu'on puiſſe s'imaginer: on y remarquera un accord d'autant plus parfait, que nos ſuppoſitions ſeront plus vraies. Tous ces mouvemens peuvent être extremement inégaux en grandeur abſolue: mais ils ſe feront toûjours avec une proportion conſtante. Au même inſtant qu'un pendule aura fait le tiers ou le quart de ſa digreſſion totale, tous les autres pendules ſe trouveront dans le même cas, quoique les digreſſions angulaires de tous ces pendules ſoient fort inégales. Un pendule qui feroit naturellement ſes oſcillations dans le même tems que le vaiſſeau fait ſes agitations, ſera remarqué faire des mouvemens exorbitans, pendant qu'un autre n'en fera que de très-médiocres. Si le vaiſſeau faiſoit ſes agitations chacune pendant deux ſécondes, un pendule ſimple de 12 pieds ſera extremement jetté de côté & d'autre, par les plus petites agitations du vaiſſeau, pendant que les autres pendules ſimples n'auront qu'un très-petit mouvement, tant ceux qui ſont plus longs, que ceux qui ſont plus courts: une horloge qui battroit à chaque double ſeconde, s'arrêtera tout auſſi-tôt, pendant qu'une autre continuera ſa marche. Ces conſidérations ſi eſſentielles à notre ſujet, m'engagent à entrer dans quelque détail ſur cette matiere, quoique peut-être ennuyant; je le ferai avec toute la briéveté qui me ſera poſſible.

§. VIII.

SOIT A un point fixe, (*Fig.* 1.) M & m des corps attachés au fil vertical Am, & qu'on ſuppoſe la maſſe du corps M infinie par rapport à l'autre maſſe m; cette ſuppoſition convient à notre ſujet, & elle abrége les calculs & les expreſſions. Il s'agit de trouver quel ſera le mouvement du corps m, lorſque le ſyſtème ſera balancé.

Il eſt clair d'abord que le corps ſupérieur M fera ſes balancemens exactement, ſuivant les loix d'un pendule ſimple, à cauſe de ſa maſſe infinie: mais le corps inférieur m pourra faire d'abord des mouvemens fort irréguliers, plus ou moins, ſuivant la premiere impreſſion qu'on lui aura donnée; cependant cette irrégularité ceſſera bientôt, de même que dans une corde de muſique, les premieres vibrations ne peuvent qu'être extremement embrouillées, quoiqu'à en juger par leur ſon, il ſemble qu'elles ſe ſoient miſes tout auſſi-tôt à leur état naturel & permanent. Dans cet état de permanence, voici quelle ſera la nature des oſcillations du corps m, dans la ſuppoſition qu'on emploie ordinairement pour ces queſtions, que les oſcillations puiſſent être cenſées infiniment petites.

(a) Soit la longueur du fil $AM = L$, celle du fil $Mm = l$, ſuppoſez le ſyſtème dans la ſituation ABC ou $AB'C'$; prolongez AB ou AB' juſqu'en D ou D'; je dis qu'on aura l'angle CBD ou $C'B'D' = \frac{l}{L-l} \times BAM$ ou $= \frac{l}{L-l} \times B'AM$. On peut donc déterminer un angle par l'autre, par le ſimple rapport des longueurs des fils.

(b) Plus la longueur l eſt petite, plus l'angle CBD ſera petit auſſi. Si les fils AM & Mm ſont égaux, l'angle CBD deviendra infiniment plus grand que l'angle BAM,

ou plûtôt celui-ci infiniment plus petit que l'autre, puiſque nous ſuppoſons l'un & l'autre fort petit; & enfin ſi la longueur *Mm* eſt plus grande que la longueur *AM*, l'angle *CBD* deviendra négatif, & toûjours plus grand que *BAM*. La ſeconde figure, marquée avec des lettres analogues, éclaircira la nature de ces oſcillations.

§. IX.

Ce que nous venons de dire doit être changé & étendu, pour pouvoir être appliqué à notre ſujet, notre deſſein étant de repréſenter par le point *M* un point fixe du vaiſſeau agité autour du point *A*, qui ſera ſon centre de gravité; & alors *Mm* ſera un pendule ſuſpendu dans le vaiſſeau : il convient donc de ſuppoſer le point *M* plus haut que le point *A*; comme auſſi les balancemens du vaiſſeau ne ſeront pas préciſément de la même durée que feroient les oſcillations naturelles d'un pendule de la longueur *AM*; il faudra étendre l'hypotheſe de la peſanteur naturelle à une peſanteur quelconque, pour pouvoir égaler les balancemens du vaiſſeau, & les oſcillations du pendule *AM* par rapport à leur durée. Suppoſons pour cet effet une verge *AM* (*Fig.* 3.) ſans poids mobile autour du point *A*, & chargée à ſon extrémité d'une maſſe infinie *M*; que cette maſſe ſoit animée par une peſanteur négative, qui agiſſe toûjours parallelement à la direction *AM*. Suppoſons encore un pendule *Mm* ſuſpendu au point *M*, dont le poids *m* ſoit animé par la peſanteur naturelle parallelement à la direction *Mm*. Si après cela la verge *AM* vient à balancer autour du point *A*, il eſt queſtion de déterminer les balancemens du pendule *Mm*, après qu'ils ſeront devenus réguliers & correſpondans à ceux de la verge *AM*. Voici donc ce qui doit arriver dans ces hypotheſes.

(α) Concevons la verge dans la situation AB ou AB', & le pendule en BC ou $B'C'$, & supposons premierement la pesanteur négative, qui anime la masse infinie M, précisément égale à la pesanteur naturelle. Soit encore $AM = L$, & $Mm = l$, & tirez les verticales BE & $B'E'$, je dis que l'angle CBD sera $= \frac{2L-l}{L-l} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{L}{L-l} \times BAM$; la même chose sera des angles du côté opposé.

(β) Si la pesanteur négative qui anime la masse M est à la pesanteur naturelle, comme p à 1, je dis qu'on aura l'angle $CBD = \frac{L+pL-pl}{L-pl} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{pL}{L-pl} \times BAM$.

On peut abréger ces formules & les rendre plus sensibles, en introduisant la longueur d'un pendule simple λ, isochrone, avec les agitations du vaisseau ou de la masse M: on aura alors cette analogie; $p:1 = L:\lambda$, & par conséquent $p = \frac{L}{\lambda}$, & substituant cette valeur, on aura l'angle $CBD = \frac{\lambda+L-l}{\lambda-l} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{L}{\lambda-l} \times BAM$.

(γ) Cette derniere expression marque, que l'angle que le fil du pendule fera avec la verticale est d'autant plus petit, que la distance AM est plus petite, que le pendule est plus court, & que le point de suspension M est balancé plus lentement. Donc si un pendule court est suspendu dans le vaisseau près de son centre de gravité, & que le vaisseau soit agité fort lentement, ce pendule ne s'écartera jamais sensiblement de la verticale; & moins on aura satisfait à ces conditions, plus le pendule sera jetté de côté & d'autre, par les agitations du vaisseau. Un pendule infiniment long conserveroit sa position verticale, malgré les

les balancemens finis du point de suspension : mais on ne peut pas faire sur mer, que la longueur l soit beaucoup plus grande que λ ; ainsi cette derniere remarque ne seroit pas dans sa place, par rapport au but que je me propose ; mais comme la premiere remarque peut nous être utile, je vais l'éclaircir par deux exemples opposés.

I. Supposons dans un vaisseau un pendule d'un pied, suspendu un pied au-dessus du centre de gravité du vaisseau, & que ce vaisseau emploie quatre secondes à chaque balancement, que nous supposerons de 20 degrés, ou dix degrés de chaque côté, nous aurons $L = l = 1$; $\lambda = 49$; le plus grand angle BAM de dix degrés, & cela donne le plus grand angle $CBE = \frac{1}{48}$ degré, ou d'une minute & 15 secondes.

II. Supposons à présent que tout le reste étant égal, le pendule soit long de 30 pieds, & suspendu 20 pieds plus haut que le centre de gravité du vaisseau, & nous trouverons que la plus grande digression du pendule sera d'environ dix degrés & demi, & plus de cinquante fois plus grande que dans le premier cas. Cependant l'un & l'autre pendule feroit ses oscillations dans le même tems, & toûjours avec les balancemens du vaisseau.

§. X.

LE précédent article sert à déterminer les balancemens d'un pendule simple, suspendu verticalement au-dessus du centre de gravité du vaisseau, pourvû que le vaisseau soit droit dans la position moyenne de ses balancemens. Mais si dans cette position moyenne le vaisseau étoit couché sur un de ses côtés, il faudra un peu changer les théoremes que nous venons d'indiquer.

Soit AM (*Fig* 4.) la situation d'équilibre d'une verge

mobile autour du point *A*, & du point *M* soit suspendu un pendule simple *Mm*; qu'on tire la verticale *AF*, & l'horisontale *MF*; qu'on suppose ensuite le point *M* faire des oscillations réciproques *BMB'*; que *BC* & *B'C'* marquent les positions du pendule, le point *M* se trouvant en *B* & *B'*; tirez les verticales *BE* & *B'E'*; je dis qu'en retenant toutes nos dénominations precédentes, on aura l'angle $CBE = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Il n'y a donc qu'à multiplier l'angle trouvé pour le premier cas, par le rapport du cosinus de l'angle de l'inclinaison du vaisseau, au sinus total, pour avoir ce même angle qui convienne au cas présent. Même la formule précédente sera générale, pourvû qu'on entende par *L*, non la distance *AM*, mais la hauteur *AF*, c'est-à-dire la hauteur verticale du point de suspension du pendule, par-dessus le centre de gravité du vaisseau. Il s'ensuit de-là, que plus le vaisseau sera couché sur un de ses côtés, mieux le pendule gardera sa situation verticale. Au reste, ces théoremes supposent à la vérité, que les balancemens angulaires du point *M* soient fort petits; cependant ils pourront être considérablement grands, sans que nos théoremes s'éloignent sensiblement de la vérité. Il est facile aussi de les confirmer par des expériences; puisque par le moyen d'un contre-poids, on pourra donner à la verge *AM* telle position d'équilibre qu'on voudra; on pourra ensuite suspendre du point *M* un pendule, & puis faire balancer le systême, & on remarquera toûjours entre les angles *CBE* & *BAM*, la relation que nous leur avons assignée, pourvû que les oscillations soient devenues harmonieuses, & elles ne tarderont gueres à le devenir.

§. XI.

JE serois trop prolixe, si je voulois donner une

démonſtration rigide de ces propoſitions : cependant pour en donner quelque idée, je m'attacherai, par exemple, à la Note (C) du §. IX. auquel repond la troiſieme Figure. Conſidérons donc que la maſſe M ſe trouvant en B, ſa force accélératrice ſera $= \frac{BM}{BA} \times p$, puiſque le poids m infiniment plus petit, ne ſçauroit la déranger. Quant à la force accélératrice du petit poids m poſé en C, le tranſport du point de ſuſpenſion B ne ſçauroit la faire varier, parce que l'angle CBM eſt cenſé droit; ainſi ſa force accélératrice ſera ſimplement $= \frac{CE}{CB}$, & comme le corps en B doit arriver en M, dans le même tems que le petit corps en C arrive en m, il faut faire que les forces accélératrices $\frac{BM}{BA} \times p$, & $\frac{CE}{CB}$ ſoient proportionnelles aux eſpaces à parcourir, BM & Cm. De cette proportionalité, on tirera $Cm = \frac{BA}{BA - CB \times p} \times BM$, & $CE = \frac{CB \times p}{BA - CB \times p} \times BM$, ou $\frac{CE}{CB} = \frac{BA \times p}{BA - CB \times p} \times \frac{BM}{BA}$, c'eſt-à-dire l'angle $CBE = \frac{BA \times p}{BA - CB \times p} \times BAM = \frac{pL}{L - pl} \times BAM$; tout comme nous avons trouvé dans l'endroit cité. On trouvera les autres démonſtrations, pour peu qu'on y ſupplée.

§. XII.

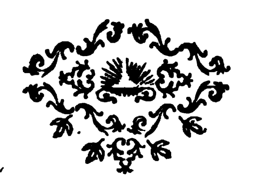
Les propriétés que nous venons d'indiquer, ne ſerviront pas ſeulement pour déterminer les balancemens d'un pendule ſimple ſuſpendu dans un vaiſſeau agité, mais encore pour en tirer pluſieurs éclairciſſemens ſur le mouvement des pendules appliqués aux horloges, pour les employer ſur mer avec plus de ſûreté & plus de ſuccès, s'il eſt encore poſſible de s'en ſervir; & s'il ne l'eſt pas, pour leur ſubſtituer d'autres horloges marines, dont la marche ſoit bien aſſurée. C'eſt dans cette vûe que je ferai encore

remarquer la propoſition ſuivante, quoique connue de tout le monde.

§. XIII.

TOUT corps ſuſpendu & entraîné d'une façon quelconque par ſon centre de gravité, conſerve conſtamment une poſition parallele, par rapport à toutes ſes parties. Ainſi ſi le centre de gravité d'un corps quelconque eſt au point *B*, (*Fig* 5.) attaché à l'extrémité du fil *AB*, & que *CD* ſoit une ligne quelconque, paſſant par deux points donnés du corps; ſi l'on conçoit l'extrémité du fil *A* tranſportée d'un mouvement quelconque en *a*, & que par ce mouvement, la ligne *CBD* parvienne en *c b d*, ces deux lignes *CD* & *c d* feront toûjours paralleles entre elles.

Avant que de finir ce Chapitre, je prierai encore le Lecteur de remarquer que dans les quatre premieres Figures, le point *m* peut être pris pour le centre d'oſcillation d'un corps d'une étendue finie quelconque; la ligne *Mm* marquera toûjours la diſtance entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation. Cette vérité n'eſt pourtant pas claire par elle-même, quoique l'on ſuppoſe tous les théoremes ordinaires du centre d'oſcillation; mais on peut la démontrer par de nouveaux principes, & elle ne ſubſiſte, que lorſque le corps fait avec la ligne *Mm* un ſyſtème roide, ſans pouvoir tourner autour du point *m*, de ſorte que tout le ſyſtème faſſe un même mouvement angulaire autour du point de ſuſpenſion *M*.



CHAPITRE II.

Contenant quelques réflexions sur la meilleure maniere de mesurer sur mer le Tems absolu.

§. XIV.

CE qui m'engage à ces recherches, c'est que souvent on ne peut trouver l'heure sur mer, sans connoître de certains intervalles de tems. A quoi serviroit d'ailleurs le plus souvent, de connoître pour un moment l'heure par observation, si l'on ne pouvoit conserver cette connoissance par le moyen des horloges marines, pendant un certain tems? La question proposée par l'Académie seroit d'assez peu d'utilité, si l'on ne pouvoit rapporter l'heure trouvée à l'heure marquée par l'horloge, & c'est ce rapport qui la rend extremement intéressante. La mesure du tems absolu sur mer étant donc toûjours si utile, & souvent si nécessaire pour la solution de notre question, j'ai cru de mon devoir d'apporter toute l'attention possible à cet article. Il y a une œconomie dans la marche des horloges, qu'on n'a pas encore développée, que je sçache, & qui est cependant, à mon avis, de grande conséquence pour la perfection des horloges en général: & ces remarques jointes à celles que nous fournira le précédent Chapitre, pourront, à ce que j'espere, nous mener plus loin qu'on n'a encore été sur ce sujet. Je partirai encore des premiers principes.

§. XV.

LES pendules mesurent le tems sur terre avec tant de

justesse, qu'on peut se passer aisément d'une plus grande perfection. Ce qui peut encore un peu déranger le mouvement égal des pendules, est l'inégalité du pendule, causée par les changemens du froid & du chaud, & puis l'inégalité des arcs décrits par le pendule. On pourroit éviter le premier inconvénient (qui est en même tems le seul dont on se mette encore en peine) de plusieurs façons, pourvû qu'on fît le pendule de deux métaux différens, qui s'allongent & se racourcissent inégalement, par des changemens égaux du froid & du chaud, & qu'on sçût bien la proportion de ces allongemens & racourcissemens d'un métal à l'autre. La meilleure maniere de trouver cette proportion, consiste dans les pendules mêmes. Par exemple, M. Graham a trouvé qu'un changement de froid répondant à 11 degrés sur son thermometre, faisoit accélérer ou retarder sa pendule de 6″ pendant 24 heures, ce qui fait 0, 0 6 lignes, sur 441 lignes; & s'il avoit fait les mêmes expériences sur des pendules faits d'autres métaux, il auroit pû trouver de cette façon, la proportion des allongemens de différens métaux, causés par la même augmentation de chaleur; & sçachant cette proportion, je dis qu'on pourroit donner différentes constructions pour les pendules, telles que leurs oscillations ne se ressentent plus des changemens du froid & du chaud. Je me contenterai pour le présent, d'avoir indiqué ce remede, fort simple dans l'exécution, d'autant qu'une ample déduction pourroit me mener trop loin. Si les circonstances rendoient ces petites variations intéressantes, on pourra suppléer à ce défaut par un thermometre, après en avoir fait l'expérience de M. Graham, que je viens de citer: on pourra remarquer l'état du thermometre de deux heures en deux heures, & on en déduira facilement la petite correction qu'il convient de faire sur l'heure marquée

par l'horloge. C'est M. de Maupertuis qui nous a rapporté l'expérience de M. Graham, dans son excellent Ouvrage sur la Figure de la Terre, p. 165, Edit. de Paris; cependant on ne sçauroit encore en faire tout l'usage, sans une description plus exacte du thermometre dont s'est servi M. Graham. M. de Maupertuis dit simplement après M. Graham, que le thermometre étoit de mercure; que le degré de chaleur qui répond à l'eau bouillante, étoit marqué par o; que lorsque ce thermometre étoit sur 138, la pendule accéléroit sur le tems moyen de 4′ 4″ par jour, & lorsqu'il étoit à 127 (degré de chaleur que Messieurs les Académiciens ont imité à Pello) la pendule n'accéléroit plus que de 3′ 58″ par jour, & qu'ainsi une différence de 11 degrés sur le thermometre, produisoit une différence de 6″ *par jour dans la* marche de la pendule. Mais quels sont les degrés sur ce thermometre? c'est ce qui n'est point marqué. On peut cependant le déduire de ce que M. de Maupertuis marque aux pages 169 & 172, où il dit que le thermometre de M. Prins étoit sur 61, lorsque celui de M. Graham étoit sur 127. Or, le thermometre de M. Prins parcourt environ 180 degrés, depuis le terme de la congélation de l'eau de pluie, marqué 32, jusqu'au terme de l'eau bouillante, marqué par 212 dans l'état moyen du barometre (car on sçait que les différentes hauteurs du barometre font varier le degré de chaleur de l'eau bouillante). Donc 180 degrés du thermometre de M. Prins, valent 152 degrés environ, sur le thermometre dont s'est servi M. Graham, puisque 212—61, c'est-à-dire, 151 du premier thermometre, répondoient à 127 du second: il suit de-là, que le terme de la congélation de l'eau de pluie étoit marqué par 152 sur le thermometre dont se sont servis M. Graham, & ensuite Messieurs les Académiciens; d'où je conclus que ce

thermometre étoit construit & divisé suivant les regles de M. de l'Isle de Petersbourg, qui commence par o depuis la chaleur de l'eau bouillante, & qui divise le volume du mercure qu'il occupe dans l'eau bouillante en 10000 parties, & qui a remarqué que le mercure se resserre de 152 parties, lorsqu'il est réduit au terme de la congélation de l'eau. Cet éclaircissement peut être de conséquence, pour tirer tout le fruit qu'on peut des importantes & très-exactes Observations faites par Messieurs les Académiciens au Cercle Polaire; c'est pourquoi je n'ai pas hésité de faire cette remarque en passant, d'autant qu'elle nous met en état de calculer jusqu'où peuvent aller les inégalités dans la marche des pendules, par les variations du thermometre. On a remarqué que le plus grand froid observé en Irlande, & le plus grand chaud observé au Pérou, fait une différence d'environ 83 degrés sur le thermometre de M. Prins, qui valent 70 degrés de celui de M. de l'Isle: cette différence de chaleur en peut produire une de 38″ par jour sur le mouvement des pendules, & dans un même climat un peu Septentrional, où les variations du froid & du chaud sont plus grandes, les variations des pendules peuvent aller pour le moins jusqu'à 30″ par jour, de l'été à l'hyver, & souvent jusqu'à 8″ ou 10″ dans un même jour. Ces grandes différences marquent combien on doit être attentif aux degrés du thermometre dans les observations exactes qu'on entreprend, comme M. de Maupertuis le remarque aussi, p. 167. On doit donc construire & diviser les thermometres avec une attention proportionnée, en remarquant que le degré de chaleur de l'eau bouillante n'est pas tout-à-fait fixe, mais qu'il dépend de la hauteur du barometre; que l'eau boût d'autant plus facilement, que la pression de l'atmosphere est moindre, & qu'un pouce de différence dans la hauteur du barometre, fait

fait varier d'environ 3 degrés la chaleur de l'eau bouillante sur le thermometre de Fahrenheit, qui font environ deux degrés & demi sur le thermometre de M. de l'Isle. Ces précautions ne seront jamais entierement inutiles sur mer, & souvent elles seront très-utiles.

§. XVI.

DISONS aussi quelques mots sur l'inégalité dans la marche des pendules, causée par l'inégalité des arcs décrits par le pendule. Il y a ici deux forces à considérer; celle qui anime la pendule, & celle qui lui est opposée. La premiere consiste ou dans l'action d'un poids, ou dans celle d'un ressort: l'action d'un poids moteur ne sçauroit qu'être constamment la même sur terre, & est par conséquent beaucoup préférable à celle d'un ressort, qu'on n'emploie que dans les petites pendules; lors donc que l'horloge est animée par un poids moteur, il n'y a que l'inégalité des résistances qui puisse faire varier les arcs décrits par le pendule. On a douté autrefois, si les horloges accéléroient ou retardoient, en faisant décrire au pendule de plus grands arcs; & on peut voir sur cette question un Mémoire de M. Saurin, inseré dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, de l'année 1720: mais de la façon qu'on construit aujourd'hui les pendules, on ne peut plus douter là-dessus; & toutes les expériences font voir que les bonnes horloges en sont retardées. La Géometrie démontre, que plus les arcs circulaires sont grands, plus ils demandent de tems pour être décrits par un pendule libre; & les oscillations d'un pendule appliqué aux horloges bien construites, ne peuvent s'écarter assez de cette régle, pour faire un effet contraire. M. Huguens a introduit les oscillations cycloïdiques;

elles font fort utiles dans les petites pendules, qui décrivent de grands arcs & fort inégaux, mais assez inutiles dans les horloges à secondes, dont les pendules ne décrivent que des arcs de 3 à 4 degrés : peut-être même que l'usage des lames cycloïdiques pourroit faire plus de mal que de bien, étant impossible de leur donner la juste figure, à cause qu'elle dépend de la juste grandeur des rayons oscillateurs, qui different extremement d'un point à l'autre, étant nul au sommet, & fort grand dans les points suivans. D'ailleurs ce bout de fil qu'on est obligé d'employer pour la suspension du pendule, est un grand inconvénient, à cause des allongemens & racourcissemens considérables qu'il souffre, outre que cette suspension est fort mauvaise par elle-même. La façon de M. Graham de suspendre les pendules, décrite par M. de Maupertuis, p. 164, est infiniment préférable. De-là je conclus, qu'il faut retenir les oscillations circulaires, mais fort petites, & prendre toutes les mesures possibles pour leur égalité & uniformité. Le Théoreme suivant nous fournira ensuite les corrections qu'il faudra employer, pour les observations qu'on prétend faire avec la derniere exactitude.

Théoreme. Pour trouver les différences de tems entre des oscillations circulaires inégales, soit la durée d'une oscillation tout-à-fait infiniment petite $= T$: le sinus total $= 1000000$; le petit sinus verse de la moitié de l'arc, décrit par le pendule $= b$, je dis que la durée de l'oscillation sera $= T + \frac{b}{8000000} T$.

Pour être donc tout-à-fait sûr de la mesure exacte du tems, on n'a qu'à observer exactement les arcs décrits par le pendule : il est vrai que ce Théoreme suppose que le tems d'une oscillation soit le même dans un pendule

détaché ou appliqué à une horloge, mais aussi cette supposition peut être admise sans peine aux bonnes horloges, ce que je vais confirmer par l'exemple qui suit.

Exemple I. Soit $T=1''$; que le pendule décrive premierement des arcs de $3^\circ\ 0'$, & ensuite des arcs de $4^\circ\ 20'$; c'est l'exemple que M. de Maupertuis rapporte p. 166, disant que les dernieres oscillations retardoient sur les premieres de $3''\frac{1}{2}$ ou $4''$ par jour. Notre Théoreme donne pour les premieres $b=343$, & le tems d'une oscillation $1''$ & $\frac{343}{80000000}$ parties de seconde, & toutes ces parties donnent pendant 24 heures $3'',7$: pour les dernieres oscillations, on a $b=715$, & alors la pendule sera retardée de $7'',7$ par jour; la différence de ces retardemens fait précisément $4''$ par jour; tout comme on a trouvé par l'expérience, dont on doit admirer la grande justesse. Cette conformité m'engage à ajoûter encore un autre exemple, qui nous fournira une petite correction à faire sur le calcul d'une autre expérience, faite par Messieurs les Académiciens, pour déterminer l'accélération du pendule de Paris à Pello.

Exemple II. Messieurs les Académiciens ont établi par des observations faites avec la derniere précision, que de Paris à Pello, pendant une révolution des fixes, la pendule accéléroit de $59'',1$. Dans ces observations, on avoit eu soin d'entretenir jour & nuit une même température de l'air, tant à Pello qu'à Paris; on s'étoit servi de la même pendule; enfin toutes les circonstances étoient parfaitement les mêmes de part & d'autre, excepté celle-ci: A Paris les oscillations du pendule étoient $2^\circ\ 10'$ de chaque côté, & à Pello $2^\circ\ 5'$. (Voyez le livre de M. de Maupertuis, *p.* 170, 171 & 172.) Cette inégalité des arcs produit une retardation par jour de Pello à Paris de $0'',58$, en vertu de notre Théoreme, & cette quantité

doit être retranchée de 59″,1, & on trouvera la vraie accélération de Paris à Pello, pendant une révolution des fixes, de 58″,52. Je fais si grand cas de la merveilleuse précision de toutes ces observations, que je n'ai pas voulu supprimer cette remarque, qui auroit été ridicule sans cela : rien n'est trop petit, pourvû qu'il soit bien sûr.

§. XVII.

Après avoir fait voir de quelle façon on pourra subvenir aux petits défauts qui peuvent encore apporter quelque incertitude à la mesure du tems, je tâcherai de réduire toute l'œconomie des horloges à ses vrais principes, que je ne sçache pas avoir encore été développés : j'espere que les conséquences que j'en tirerai pour notre sujet, excuseront cette digression, sur une matiere si importante par elle-même.

Si le pendule n'étoit pas appliqué à l'horloge, ses oscillations diminueroient peu à peu, par deux raisons : premierement, à cause du petit frottement du pendule contre le point de suspension ; & en second lieu, à cause de la résistance de l'air. La maniere avec laquelle M. Graham soûtient les pendules, & que M. de Maupertuis décrit p. 164, rend le frottement tout-à-fait insensible, comme on peut le démontrer; il n'y a donc alors que la simple résistance de l'air à considérer. Supposons l'arc entier décrit par le pendule $= 2A$, & le petit arc, insensible de diminution $= \alpha$, de sorte que l'arc de descente ayant été A, l'arc de montée soit $A - \alpha$; soit encore la longueur du pendule $= l$, la descente verticale du poids du pendule peut être censée, les oscillations étant petites, $= \frac{AA}{2l}$, & la montée verticale suivante $= \frac{AA - 2A\alpha}{2l}$, & la différence $= \frac{A\alpha}{l}$: nommons encore p le poids du

pendule, & nous aurons $\frac{A}{l}\alpha p$, pour mesure de la quantité de sa perte à chaque oscillation, qui, dans toutes les occasions, doit être mesurée par le produit de la hauteur verticale par la masse. Lors donc que le même pendule est appliqué à l'horloge, cette perte est continuellement réparée par l'action du poids moteur : nommons ce poids P, & supposons qu'il descende à chaque vibration du pendule d'une quantité insensible ζ ; il est certain que si le poids moteur entretient la pendule dans une marche uniforme, nous aurions, sans le frottement, $\zeta P = \frac{A\alpha}{l}p$: mais ce frottement ne doit pas être négligé ; il est même la cause principale de l'inégalité des balancemens du pendule, parce qu'il est inégal lui-même, principalement à cause de l'inégale ténacité de l'huile. Pour considérer donc l'effet du frottement entier de toutes les roues, nous supposerons qu'il soit en équilibre avec un poids F, appliqué au même point avec le poids moteur. Il est clair que la véritable force motrice sera $P-F$, & qu'une telle force motrice, sans le frottement, feroit le même effet que le poids moteur P avec le frottement : la vraie équation est donc celle-ci.

$$\zeta(P-F) = \frac{A}{l}\alpha p.$$

Avant que de tirer de cette équation les nouvelles lumieres qu'elle répand sur cette matiere, il sera bon de dire un mot sur le petit arc de diminution, exprimé par α. Dans les pendules bien suspendues, il est certain que cette diminution provient, sinon pour le tout, du moins pour la plus grande partie, de la résistance de l'air ; il dépend donc d'une infinité de circonstances, comme de la grandeur de la lentille, de sa pesanteur spécifique, de sa figure, &c. comme on le démontre dans la théorie des

résistances des fluides sur différens corps : mais si le pendule & l'air qui l'environne restent les mêmes, si la résistance de l'air est en raison quarrée des vitesses, comme elle l'est certainement à fort peu près, & que le corps décrive de petits arcs, on démontre alors que les diminutions insensibles α sont en raison quarrée des arcs A : nous poserons donc $\alpha = \frac{AA}{CC}\gamma$, en prenant pour C un arc arbitraire, & pour γ, la diminution qui répond à cet arc, & là-dessus nous aurons :

$$\zeta(P-F) = \frac{A^3}{CCl}\gamma p.$$

Si l'air qui environne le pendule étoit variable, on démontre que la quantité γ est proportionnelle à la densité de l'air, & le rapport des densités de l'air peut se déterminer par l'inspection du thermometre & du barometre, gradués pour cet effet. Voici à présent les Corollaires principaux qui découlent de nos équations.

(a) Toutes les valeurs de notre derniere équation peuvent être déterminées : les poids P & p sont connus ; le frottement F se trouvera, si, après avoir ôté le pendule & le poids moteur, on met à la place de ce poids, un autre beaucoup plus petit d'abord, & qu'on l'augmente peu à peu, jusqu'à ce qu'il fasse tourner toutes les roues, & ce poids sera exprimé alors par F; la quantité ζ, qui marque la descente verticale du poids moteur à chaque oscillation du pendule, se détermine aisément, en mesurant sa descente au bout de 24 heures, & en divisant cette descente par $24 \times 60 \times 60$ ou 86400 ; l marque la distance du centre de gravité du pendule, depuis son point de suspension ; elle sera un peu plus petite dans les horloges à secondes que 441 lignes : A est la moitié de l'arc décrit par le centre de gravité du pendule ; C un arc pareil, arbitraire ; & enfin γ marque la diminution insensible, que le pendule

détaché de l'horloge souffre, lorsqu'il décrit dans sa descente ledit arc C; & on pourra déterminer pareillement ce petit arc γ, en mesurant la diminution actuelle après mille balancemens, & en prenant la millieme partie de cette diminution. Prenons pour exemple la pendule de M. Graham, que l'on conserve encore à l'Académie: le poids moteur ordinaire y est de 11 liv. 14 $\frac{1}{2}$ onces; la pendule ne se remonte qu'au bout d'un mois, & doit descendre, à ce que l'on m'a marqué, de 3 $\frac{1}{2}$ pieds pendant ce tems; nous avons donc $\mathfrak{C} = \frac{1}{5143}$ lignes, $P =$ 11 liv. 14 $\frac{1}{2}$ onces: je démontrerai ci-dessous, que F doit y être à peu près $= \frac{1}{4} P$; par les dimensions de la lentille, qu'on me marque être de cuivre jaune, le poids du pendule p doit être à peu près $= \frac{3}{2} P$: le pendule faisoit de chaque côté un arc de 2° 10′, ce qui fait $\frac{A}{C} = 0,0378$: mettons l'arc arbitraire $C = A$, & nous trouverons $\gamma = \frac{1}{389}$ lignes; d'où je conclus que le centre de gravité du pendule détaché de l'horloge, descendant sur un arc de 2° 10′, perdroit dans sa montée $\frac{1}{389}$ lign. ou la quarante-neuvieme partie d'une minute, en supposant la distance du centre de gravité au point de suspension, de 3 pieds. Ces valeurs étant connues dans un cas, on peut en déduire ce qui doit arriver dans d'autres cas, & sur-tout, toutes les variations que le pendule souffrira en changeant le poids moteur, en supposant le frottement plus ou moins grand, & l'air qui environne le pendule devenu plus ou moins dense, par rapport à la densité de l'air du tems de l'observation fondamentale.

(*b*) *Si le frottement des roues exprimé par F étoit nul*, les arcs décrits par le pendule seroient, en raison soûtriplée, des poids moteurs, tout le reste étant égal.

(*c*) En considérant le frottement, ces mêmes arcs sont

en raison des racines cubiques, des excès du poids moteur par-dessus les frottemens. Ce Corollaire m'a fait connoître quel étoit le frottement dans la pendule de M. Graham; car M. de Maupertuis dit, p. 165 & 166, qu'avec le poids ordinaire le pendule décrivoit des arcs de 4° 20', & avec la moitié de ce poids, des arcs de 3° 0'; ces arcs sont en raison de 13 à 9 : donc $P - F : \frac{1}{2}P - F = $ Cub. 13 : Cub. 9 = 2197 : 729, ce qui donne $F = \frac{739}{2936}P$; ou à peu près $F = \frac{1}{4}P$, tout comme j'ai mis dans la note (*a*). Si on suppose le plus petit frottement égal au quart du poids moteur, & le plus grand frottement égal à sa moitié, les plus grandes oscillations seront aux plus petites, comme $\sqrt[3]{3}$ à $\sqrt[3]{2}$, ou comme 1144 à 1000 : le plus grand arc étant donc de 4° 20', le plus petit sera de 3° 47', & cette différence des arcs ne fera qu'une seconde & demie par jour dans la marche de la pendule (§. XVI.); d'où l'on voit combien ces changemens sont peu à craindre dans les bonnes horloges.

(*d*) Une autre source de variations des arcs décrits par le pendule, est la différente densité de l'air, & tout le reste étant égal, les arcs sont réciproquement proportionnels aux racines cubiques des densités de l'air : or la plus grande densité de l'air est à la plus petite dans nos climats, environ comme 6 à 5; donc le plus grand arc sera au plus petit à cet égard, comme $\sqrt[3]{6}$ à $\sqrt[3]{5}$, ou comme 1062 à 1000 : le plus grand arc étant donc de 4° 20', le plus petit sera à cet égard de 4° 5', & cette différence vaut environ trois quarts de seconde par jour dans la marche de la pendule.

(*e*) Comme le froid augmente en même tems la ténacité de l'huile & la densité de l'air, outre qu'il raccourcit le pendule, il concourt par toutes ces trois raisons, à accélérer la pendule; mais les deux premieres sont presque

insensibles,

insensibles, par rapport à la troisieme dans les bonnes pendules, puisqu'en vertu du §. XV, celle-ci toute seule peut aller jusqu'à 30″ par jour, du plus grand chaud au plus grand froid dans un même climat, pendant que les deux autres jointes ensemble, ne vont que jusqu'à 2″ d'une extrémité à l'autre. Ce raccourcissement & allongement de la verge du pendule est donc le seul inconvénient qui reste aux bonnes pendules; & comme on peut y remédier par l'inspection fréquente du thermometre, ou bien en faisant la verge de deux pieces de différens métaux, & en la chargeant d'un double poids, le tout avec de certaines proportions, fondées sur les différentes extensions de ces métaux, causées par la même augmentation de chaleur (cet éclaircissement suffira, tant que je n'aurai d'autres Lecteurs que mes Juges); je crois qu'il ne reste plus rien à desirer sur la perfection des pendules pour les observations sur terre.

(*f*) La construction de l'échappement & de la roue de rencontre, est telle que les oscillations du pendule ne peuvent être diminuées au-delà d'un certain degré, sans arrêter la marche de l'horloge: cela fait que le poids moteur ne sçauroit non plus être diminué au-delà d'un certain degré; & voici comme on pourra le déterminer. Soit a la moitié du plus petit arc possible, & π le plus petit poids moteur, on aura $\frac{A^3}{a^3} = \frac{P-F}{\pi-F}$ ou $\pi = \frac{a^3 P - a^3 F + A^3 F}{A^3}$.

Supposons dans la pendule de M. Graham, $F = \frac{1}{4} P$, [voyez la note (*c*)] & $a = \frac{1}{2} A = 1° 5'$, nous trouverons $\pi = \frac{11}{32} P = 4$ liv. $1\frac{1}{4}$ once, puisque P étoit de 11 liv. $14\frac{1}{2}$ onces.

(*g*) Une remarque que je souhaite sur-tout qu'on fasse, est que la résistance de l'air est une chose très-nécessaire à la marche de la pendule, & que quand même on pourroit

l'éviter entierement, il faudroit se donner bien de garde de le faire; & cela pour être paradoxe, n'en est pas moins vrai : si la résistance que l'air apporte au mouvement du pendule étoit nulle, nous aurions $\gamma = 0$, & $A = \infty$, c'est-à-dire que le pendule décriroit nécessairement des arcs infiniment grands. Cette conclusion ne doit pas nous surprendre, car sans la résistance de l'air, le poids moteur n'auroit que le frottement à vaincre, & comme le frottement demeure le même, il faudroit alors que par l'action continuée du poids moteur, il se fît une augmentation continuelle dans les balancemens du pendule. Mais quant au frottement, il faut l'éviter avec toutes les attentions possibles, car il ne peut que nuire à tous égards.

(*h*) Le poids de la lentille, quel qu'il soit, ne change pas les arcs du pendule, pourvû que la lentille conserve la même surface, qui donne toûjours à l'air une prise égale; autant que le poids p devient plus grand, autant le petit arc γ devient plus petit, & la quantité γp dans notre équation, reste toûjours la même, comme on le démontre dans la théorie des milieux résistans; donc l'arc A n'est point changé par la variation du poids p. Si dans la pendule de M. Graham, la lentille avoit été deux ou trois fois plus pesante sous le même volume & la même surface, le même poids moteur de 11 liv. $14\frac{1}{2}$ onces lui auroit fait décrire les mêmes arcs de $4^\circ\ 20'$: cela suppose pourtant que le pendule ne souffre dans ses balancemens aucun frottement, ce qui ne sçauroit être exactement vrai. Ainsi comme le point principal est, que le pendule libre & le pendule appliqué à l'horloge fassent leurs oscillations suivant les mêmes loix, j'en conclus qu'il faut faire le poids de la lentille aussi grand que la matiere & les autres circonstances accidentelles le permettront : il faut aussi que la pesanteur spécifique de ce poids soit fort grande, afin que les

changemens de la pesanteur spécifique de l'air ne puissent pas être sensibles sur le tems absolu d'une oscillation : dans le cuivre jaune, cette raison peut retarder ou accélérer la pendule de deux tiers de seconde par jour.

(*i*) Plus le poids moteur est grand, plus il fait décrire au pendule de grands arcs ; il faut donc augmenter le poids, jusqu'à ce qu'il fasse décrire au pendule les arcs qu'on veut qu'il décrive ; cela détermine le poids moteur exactement à cet égard : mais il y a encore une autre considération à faire. On pourroit augmenter davantage le poids moteur, sans que le pendule décrive de plus grands arcs, en faisant que la lentille souffre en même tems une plus grande résistance de l'air. Si, par exemple, on eût augmenté dans la pendule de M. Graham le poids moteur en raison de 4 à 7, la quantité $P - F$ en seroit devenue deux fois plus grande ; & si on avoit donné à la lentille une figure à souffrir deux fois plus de résistance de l'air, la quantité γ en seroit devenue aussi deux fois plus grande, & l'arc A seroit resté le même : par-là on obtiendroit que l'inégalité des arcs A, produite par l'inégalité du frottement F, subsistât entre les termes du rapport de $\sqrt{6}$ à $\sqrt{5}$, au lieu du rapport beaucoup plus inégal $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, marqué dans la note (*c*), ce qui seroit un avantage. Il est vrai qu'on pecheroit par-là contre la regle, que les oscillations du pendule libre, & celles du même pendule appliqué à l'horloge, doivent être conservées égales le plus qu'il est possible ; cependant je crois la premiere raison plus importante que la seconde, qui lui est contraire. Cette réflexion nous apprend du moins qu'on doit être attentif à déterminer cette proportion la plus avantageuse, par un grand nombre d'expériences, & qu'il est bien sûr qu'il ne faut pas vouloir diminuer trop la résistance de l'air.

(*l*) J'ai supposé dans mes calculs, que l'augmentation

du poids moteur P n'augmente point le frottement des roues F; je crois ce principe vrai à peu près, mais non pas exactement : on peut distinguer ici le frottement mutuel des dents qui s'engrenent, d'avec le frottement du mouvement des axes : le premier frottement doit être augmenté par le poids moteur, parce que les dents sont plus pressées les unes contre les autres, mais je le crois beaucoup plus petit que l'autre, parce que ce mouvement n'est pas un mouvement glissant, mais une application successive des parties mutuelles qui se répondent, lequel mouvement on peut démontrer ne souffrir presque aucun frottement; aussi faut-il être bien attentif dans la construction des roues, qu'il ne puisse s'y faire le moindre mouvement glissant. Le second frottement provient d'un mouvement extrêmement glissant, c'est pourquoi il doit être beaucoup plus grand que le premier, & je suppose que ce frottement n'est pas augmenté par le poids moteur.

Il seroit à souhaiter que cette méchanique des horloges, & cette œconomie entre leurs forces & leurs résistances, fût à la portée de tous les habiles ouvriers, pour pouvoir mieux diriger leurs vûes & leurs attentions : mais c'est sur-tout dans la construction des montres qu'on doit être attentif à nos principes, comme je me propose de faire voir ci-dessous.

§. XVIII.

LA grande perfection des pendules ne doit pas nous permettre de renoncer à leur usage sur mer, tant qu'il est possible de les employer; & je suis sûr qu'il y a des saisons & des mers où l'on peut les employer utilement pendant long-tems : peut-être même que moyennant les regles que je vais donner, on pourra s'en servir tant que le vaisseau n'est pas fortement agité.

I. Il faut suspendre la pendule de maniere qu'elle puisse se tourner en tout sens, & il faut sur-tout la suspendre au centre de gravité du vaisseau, puisque c'est cet endroit qui est le moins agité, & on trouvera cet endroit par plusieurs observations faites sur le mouvement des pendules suspendus au vaisseau.

II. Tout corps d'une étendue finie, ayant un certain point par lequel étant suspendu, il fait ses balancemens dans moins de tems, que s'il étoit suspendu par tout autre point (on a déterminé ce point) : il faudra faire passer les axes du mouvement de la pendule par ce point.

III. Il faut encore employer un petit pendule, qui batte tout au plus les demi-secondes. Voyez par rapport à ces trois regles, les notes (ϐ) & (γ) du §. IX; mais par rapport à la derniere, il y a encore une réflexion particuliere à faire que voici.

Un pendule simple tend à faire ses balancemens harmonieusement avec les agitations du vaisseau; mais ce pendule appliqué à l'horloge, est entretenu dans ses balancemens naturels par le poids moteur. Comme il y a donc ici deux causes permanentes differentes entre elles, le principe du §. V. ne trouve plus lieu. Dans ces cas, une cause maîtrisera ordinairement l'autre, & prévaudra; ce que je pourrois éclaircir par plusieurs exemples, tirés de la Méchanique & de la Physique. Si les agitations du vaisseau étoient isochrones avec les balancemens naturels du pendule, ces mouvemens deviendroient bien-tôt harmonieux, mais aussi le pendule feroit bien-tôt des excursions énormes, & la marche de la pendule seroit ou arrêtée, ou extrêmement dérangée. La même chose arriveroit, si les deux classes de balancement étoient à peu près isochrones; mais si elles sont fort inégales, les balancemens les plus foibles & les plus tardifs ne peuvent influer

sensiblement sur les autres. Or les balancemens du vaisseau, quand ils sont uniformes & réguliers, sont fort lents; c'est pourquoi je demande que les pendules soient courts, pour les rendre moins sensibles aux agitations du vaisseau.

IV. Cette Réflexion nous fournit encore cette quatrieme regle, qui est qu'on fasse faire au pendule de grandes oscillations; alors le poids moteur maîtrisera entierement le pendule, & celui-ci ne pourra plus être dérangé dans ses balancemens par les agitations du vaisseau; & quand même chaque balancement du pendule seroit tant soit peu dérangé, toutes les petites erreurs insensibles se détruiroient mutuellement au bout d'un certain tems. Il est vrai que par ces deux dernieres regles, on s'écarte des maximes qu'on doit avoir sur terre, mais cette raison ne mérite presque aucune attention sur mer. Je suis sûr qu'avec ces précautions, on pourra se servir utilement des pendules, tant que le vaisseau n'est pas tourmenté; & j'ai fait plusieurs expériences sur des pendules suspendues par des cordes & balancées, qui m'ont fait connoître la validité de mes remarques.

§. XIX.

Si le vaisseau commence à être agité plus fortement; il faudra employer d'autres horloges, en substituant au poids moteur un ressort, & au pendule un balancier, c'est-à dire, des horloges faites en grand sur le modele des montres. Je crois que ces horloges serviront sur mer avec autant de précision, ou peu s'en faut, que sur terre; & toute la question sera, dans quel degré de perfection on croit pouvoir mettre les horloges à balancier, en les tenant entierement en repos. Comme cette matiere est fort importante, non-seulement pour les horloges marines,

mais encore pour les montres; je l'ai examinée ſcrupuleuſement, & je mettrai ici mes réflexions tout au long.

§. XX.

REMARQUONS d'abord que pourvû que chaque piece mobile dans une horloge ne puiſſe tourner qu'autour de ſon centre de gravité, cette horloge ne peut être aucunement dérangée, de quelque façon qu'on l'agite : c'eſt une conſéquence qui découle immédiatement du §. XIII. Et comment ſe pourroit-il ſans cela, qu'une montre ne fût pas extrèmement dérangée par les ſecouſſes & les cahos d'un cheval & d'une chaiſe ? Il ſera donc fort important pour la perfection des horloges marines, que les pieces tournent parfaitement ſur un même point, & que l'axe du mouvement paſſe par leur centre de gravité, avec la derniere préciſion poſſible. Cette remarque regarde ſur-tout le balancier; il faut y mettre toute ſon attention, & quand on y aura bien réuſſi, la marche de l'horloge ou de la montre ſera auſſi uniforme ſur mer, qu'elle ſeroit ſur terre : ainſi ce que j'ajoûterai ſera indépendant des agitations du vaiſſeau, auxquelles je ne ferai plus aucune attention.

§. XXI.

LES horloges marines doivent avoir au fonds la même conſtruction que les montres de poche, puiſqu'il eſt néceſſaire qu'elles ſoient animées par l'action d'un reſſort, & réglées par les oſcillations d'un balancier : mais pour pouvoir travailler toutes les pieces avec une grande exactitude, il faudra faire ces horloges auſſi grandes qu'on fait les bonnes pendules. J'avoue que les horloges à balancier ſont beaucoup moins parfaites que les bonnes

pendules, mais je crois que c'eſt faute d'avoir bien examiné le méchaniſme & toute l'œconomie de ces horloges. Je vais donc examiner les horloges à balancier, ſur le même pied & les mêmes principes que j'ai employés pour les pendules.

§. XXII.

LA premiere & principale ſource de l'imperfection des montres & autres horloges à balancier, vient des grandes excurſions du balancier & de leurs grandes inégalités. La ſeconde, eſt que le balancier ne maîtriſe pas aſſez le mouvement des roues & l'action de la force motrice : nous tâcherons de nous mettre en état de remédier à ces grands inconvéniens, & ce ſera encore en partant des premiers principes.

§. XXIII.

DANS les horloges à balancier, il y a à conſidérer, comme dans les pendules, 1°. La force du reſſort moteur. 2°. Le frottement des roues. 3°. Les réſiſtances que ſouffre le balancier dans ſes balancemens. Mais ces dernieres réſiſtances different beaucoup de celles que ſouffre le pendule dans une horloge auſſi parfaite que celle de M. Graham, qui nous a toûjours ſervi d'exemple. Le pendule n'y ſouffre preſque aucune autre réſiſtance que celle de l'air, ſans avoir aucun frottement ſenſible ; au lieu que les balanciers ſouffrent fort peu de la réſiſtance de l'air, & beaucoup du frottement. Je ne crois pas qu'on ait remarqué avant moi, que c'eſt-là preſque l'unique cauſe pourquoi on n'a pû juſqu'ici venir à bout de faire décrire au balancier de petits balancemens, ſi néceſſaires à

la

la marche uniforme de l'horloge. Si la réſiſtance de l'air étoit tout-à-fait nulle, & le reſſort de la ſpirale parfait, alors le grand reſſort n'auroit à vaincre que le frottement: s'il ne le ſurpaſſoit que fort peu, l'horloge s'arrêteroit au moindre accident; & s'il venoit à le ſurpaſſer de beaucoup, le balancier en décriroit tout auſſi-tôt de grands arcs, parce que les grands mouvemens du balancier n'apportent pas plus de réſiſtance au reſſort moteur que les petits mouvemens. C'eſt-là la nature du frottement; rien ne pourroit même empêcher le balancier de prendre continuellement plus d'eſſor, ſi la réſiſtance de l'air étoit entierement nulle, & l'élaſticité de la ſpirale parfaite. Voyez la note (*g*) du §. XVII.

§. XXIV.

PAR-*là il* arrive que le moindre changement, ſoit dans le grand reſſort, ſoit dans le frottement, cauſe de très-grandes variations dans les excurſions du balancier; & pluſieurs eſſais que j'ai faits ſur les montres, m'ont fait voir clairement que je ne me trompois point. Il ſuffira d'alléguer une ſeule expérience, que j'ai faite ſur une aſſez bonne montre, que je n'avois pas fait nettoyer depuis très-long-tems. L'huile s'y étoit tellement épaiſſie, qu'un froid tel que marque le 34 degré du thermometre de Fahrenheit, la faiſoit arrêter: je remarquois que dans cet état, le balancier faiſoit encore des excurſions de 60 degrés; j'ai mis enſuite cette montre contre le fourneau, & le thermometre à côté de la montre; le thermometre montoit juſqu'à 94 degrés, & le balancier de la montre en a augmenté ſes balancemens de près de 30°, faiſant dans ſes excurſions preſque 90°, & cette augmentation a retardé la montre d'environ 26′ par jour. Je regarde donc comme un très-grand, & le principal défaut dans les

montres, que le ressort moteur n'ait presque d'autre obstacle à vaincre que le frottement, puisqu'il en arrive nécessairement que le balancier fait de très-grandes excursions, & des excursions fort inégales, pour peu que le frottement varie, & enfin dont l'inégalité est d'autant plus grande conséquence, que les balancemens sont grands par eux-mêmes. On renverse par-là entierement le principe de l'uniformité dans la marche.

§. XXV.

IL est clair par ces remarques, 1° Qu'il faut éviter autant qu'il est possible tous les obstacles, qui n'agissent pas plus fortement dans les grands balancemens que dans les petits, & ces obstacles sont précisément le frottement, qu'on doit tâcher de diminuer avec toutes les attentions imaginables, sur-tout dans le balancier. 2°. Qu'il faut nécessairement apporter d'autres obstacles au mouvement du balancier, sans quoi ses balancemens croîtroient continuellement. 3°. Que ces obstacles doivent être d'une nature à causer, sans l'action du grand ressort, une plus grande diminution aux grandes excursions du balancier, qu'aux petites: les frottemens produisent des diminutions toûjours égales, parce que ces diminutions sont comme les tems des balancemens, qui peuvent être censés les mêmes aux grandes & aux petites oscillations, pendant que la résistance de l'air cause des diminutions, qui sont proportionnelles à peu près aux quarrés des arcs entiers.

§. XXVI.

JE prends donc pour une conséquence nécessaire, quelque paradoxe qu'elle paroisse, qu'il faut à dessein

augmenter la résistance de l'air contre le balancier, & l'augmenter considérablement, jusqu'à ce qu'elle devienne du moins égale au frottement total, puisque nous avons vû dans la note (*e*) du §. XVII, que dans la pendule de M. Graham, la résistance de l'air faisoit seule trois fois autant que le frottement entier, celui-ci n'étant que le quart du poids moteur. Pour cet effet je conseillerois d'ajoûter au balancier trois ou quatre petites aîles, qui donnent directement contre l'air. Je suis sûr que par ce moyen on pourra entretenir sûrement la marche de l'horloge, par des balancemens beaucoup plus petits qu'on n'a pû faire jusqu'ici, & que ces balancemens seront beaucoup moins inégaux.

§. XXVII.

APRE'S *avoir diminué* ainsi très-considérablement les grandes variations dans les excursions du balancier, il faut encore tâcher de rendre ses balancemens isochrones, malgré une petite inégalité qui restera toûjours. Supposons que le balancier détaché de l'horloge pût tourner avec une liberté entiere, & que l'action de la spirale rendît alors ses grands & ses petits balancemens parfaitement tautochrones entre eux, il est certain que ce tautochronisme ne subsistera plus entierement, lorsque ce balancier, quoique modéré par la même spirale, sera ajoûté à l'horloge ou à la montre; car il faudroit que l'accélération causée par la roue de rencontre, détruisît à chaque instant la résistance de l'air & celle du frottement, & cette condition est du tout impossible à remplir : on fait seulement que la somme des accélérations & la somme de toutes les résistances momentanées, se détruisent à chaque balancement; mais cela ne suffit pas pour conserver parfaitement le tautochronisme. Tout ce qu'il y a donc à faire, est que

l'effet de toutes ces petites forces soit insensible sur le balancier, de même qu'il est insensible sur les pendules. Cette considération demande que l'inertie du balancier soit augmentée autant que les circonstances le permettent, & la force de la spirale à proportion. On peut doublement augmenter l'inertie du balancier, premierement en augmentant son poids, & en second lieu, en lui donnant un plus grand rayon, sans le charger davantage; la premiere maniere cause en même tems plus de frottement au balancier, & ne seroit d'aucune utilité, si on n'avoit augmenté la résistance de l'air en même tems; la seconde maniere sera toujours utile à tous égards. Les réflexions que j'ai faites dans la note (*h*) du §. XVII, à l'égard du poids de la lentille, doivent aussi être appliquées au balancier. Cette seconde remarque ne contribuera pas moins que la premiere à la perfection des horloges marines, où rien ne nous gêne sur cet article; on y pourra augmenter & charger le balancier tant qu'on jugera à propos, & renforcer la spirale à proportion. Il s'en faut de beaucoup qu'on satisfasse à cette condition dans les montres ordinaires autant qu'on pourroit, & j'ai remarqué souvent qu'une montre n'étoit meilleure qu'une autre, quoique mieux travaillée, que parce qu'elle avoit un balancier plus grand & plus chargé. Je crois donc que moyennant ces précautions, les balancemens ne pourront différer sensiblement de ceux que le balancier feroit, s'il étoit entierement libre.

§. XXVIII.

IL s'agit d'examiner encore quelles mesures on peut prendre pour régler le balancier, considéré comme entierement libre, mais faisant des balancemens inégaux en grandeur. Or, on sçait que la spirale doit pour cet effet

exercer sur le balancier un effort proportionnel à sa distance au point d'équilibre : la théorie nous fourniroit assez de moyens pour satisfaire à ce principe, si seulement il étoit possible de les exécuter avec une précision suffisante; faute de cela, on a recours à un principe connu dans la Physique expérimentale, que tout ressort changeant sa figure naturelle, le fait par des causes proportionnelles aux changemens, tant que ceux-ci sont fort petits; c'est donc une nécessité absolue que la spirale change fort peu sa figure pendant les agitations du balancier, & moyennant cela les balancemens, quoiqu'un peu inégaux, seront sensiblement tautochrones entre eux. Cette condition nous fait voir premierement, qu'on doit prendre toutes ses mesures, pour que les balancemens du balancier soient toûjours fort petits, & je suis persuadé qu'on y pourra réussir, en évitant avec tous les soins imaginables, le frottement du balancier, & en rendant la résistance de l'air plus sensible; en second lieu, qu'il faut qu'un mouvement considérable du balancier produise peu de changement dans la figure de la spirale. Cette condition nous fourniroit un grand nombre de réflexions sur la construction & la figure naturelle de la spirale, si nous pouvions nous y arrêter : il me semble qu'il convient sur-tout, que l'extrémité mobile de la spirale soit fort proche de l'axe du mouvement du balancier, & que la spirale agisse sur le balancier, toûjours sous une même direction & sur un même levier. Je dirai aussi en passant, qu'il est de grande conséquence que les deux extrémités de la spirale soient bien fermes, & que l'axe du mouvement du balancier ne puisse branler en aucune façon; en troisieme lieu, qu'il faut que la spirale, étant en repos, soit entierement dans sa figure naturelle, sans être bandée ou génée en aucune façon, c'est-à-dire, que sa figure soit parfaitement la

même que si les deux extrémités étoient entierement libres ; que cet équilibre soit *oisif* & non *forcé*. Ce sont les termes dont se sert M. Jean Bernoulli, Docteur en Droit, dans ses Recherches Physiques sur la Propagation de la lumiere, *p.* 17 *& suivantes*, où, par un raisonnement fort solide par lui-même, mais établi sur un faux principe, il prétend précisément le contraire.

Pour éclaircir cette question, imaginons-nous la courbe *AEP* (*Fig. 6.*) sur l'axe *MP* telle, que *PG* marquant le changement dans la figure de la spirale, depuis sa figure naturelle, l'appliquée *GE* exprime la force qui tend à remettre la spirale dans son état d'équilibre : n'est-il pas évident que *PG* devenant négatif en changeant la figure de la spirale en sens contraire, l'appliquée *GE* doit devenir négative aussi ? c'est-à-dire qu'une inflexion en sens contraire, est produite par une force en sens contraire ; & cela étant, ne faut-il pas que la continuation de la courbe *AEP* soit représentée par *Pea* ? Il est donc nécessaire que la courbe *APa* ait au point *P* une inflexion contraire, & cela étant, le rayon osculateur y sera infini. Or une petite portion *EPe* approche d'autant plus d'une ligne droite, que le rayon osculateur est plus grand, & elle en approche le plus qu'il est possible, lorsque le rayon osculateur est infini ; & si cette portion *EPe* étoit entierement une ligne droite, la spirale conserveroit un tautochronisme parfait, parce que les forces seroient proportionnelles aux éloignemens du point de repos. M. Bernoulli, au lieu de continuer la courbe du côté opposé de l'axe *MN*, l'a continuée du même côté, comme le marque la figure septieme, qui est la même que la figure seconde de son discours, & c'est sur cette inattention qu'il a bâti son raisonnement, qu'on ne peut s'empêcher de trouver solide & fort ingénieux par lui-même, si l'inconvénient étoit tel

qu'il le ſuppoſe : mais il eſt certain qu'une ſpirale contrainte feroit beaucoup de mal, & je demande qu'on évite cette contrainte avec beaucoup d'attention. Je crois bien que deux ſpirales égales & appliquées en ſens contraire pourroient faire quelque bien, pourvû qu'elles ſoient l'une & l'autre dans un équilibre parfaitement *oiſif*, car la courbure des branches *AEP* & *aeP* ſera d'autant plus grande néceſſairement, que les deux ſpirales exerceroient plus de force l'une ſur l'autre.

§. XXIX.

VOILA mes réflexions principales ſur les horloges à balancier : après avoir bien peſé toute l'œconomie de ces horloges, je trouve que c'eſt preſque le ſeul frottement du balancier, *qui empêche de les* mettre dans un auſſi haut degré de perfection, que l'on ſçait mettre les pendules. Que l'on redouble donc ſes attentions à rendre ce frottement inſenſible ; je ſuis ſûr qu'on y réuſſira, pourvû qu'on convienne de l'importance de la choſe : mais peut-être faudra-t-il de toutes nouvelles manieres d'appliquer les balanciers aux horloges : je m'étendrois volontiers ſur cet article, ſi je ne craignois d'être trop prolixe. Je crois qu'il conviendra auſſi, de ne donner au plus qu'une demi-ſeconde aux balancemens, même dans les grandes horloges ; la ſpirale en aura plus de force, ce qui eſt un avantage, comme nous avons vû au §. XXVII ; & ſi les agitations du vaiſſeau étoient encore capables de faire quelque impreſſion ſur ces horloges, leur effet en ſera moins ſenſible, en vertu de la troiſieme note du §. XVIII.

§. XXX.

JE ne dois pas omettre une circonſtance qui peut

préjudicier aux horloges à balancier ; c'eſt qu'on prétend dans la Phyſique expérimentale, avoir remarqué quelque changement dans les forces élaſtiques des reſſorts, par les changemens de la température de l'air : ſi cela étoit, la ſpirale ne pourroit pas régler uniformément le balancier ; mais je ne ſuis pas encore entierement convaincu du fait : quoi qu'il en ſoit, ce que j'ai dit au §. XV, ſuffira parfaitement pour s'en éclaircir, & pour connoître enſuite les corrections à faire, par le moyen du thermometre.

§. XXXI.

JE finirai ce Chapitre par une nouvelle maniere de régler davantage les balancemens, ſoit d'un pendule, ſoit d'un balancier. Soit *AB* (*Fig.* 8.) la direction moyenne du pendule, ou d'un rayon du balancier, qui, dans ſes plus petits balancemens, vienne juſqu'en *AC* & *AD*, & qu'on mette à chaque côté un petit reſſort fort foible, tels que *mn* & *qp*, dont les extrémités *n* & *p* ſoient légerement touchées, lorſque le pendule ou le balancier fait ſes plus petites excurſions. Si enſuite ces balancemens deviennent plus grands, & par eux-mêmes plus tardifs, ils ſeront un peu accélérés par les petits reſſorts *mn* & *qp*, & on pourra facilement régler leur action d'une façon que la plus grande oſcillation devienne parfaitement tautochrone avec la plus petite, & alors les oſcillations moyennes ne pourront manquer d'être pareillement tautochrones, avec beaucoup de préciſion. Je n'aurois pas haſardé cette nouvelle idée, ſi pluſieurs expériences préliminaires ne m'en avoient garanti le ſuccès. Je me contenterai cependant de l'avoir indiquée, laiſſant à d'autres le ſoin de la perfectionner, s'ils trouvent qu'elle le mérite.

CHAPITRE III.

Contenant quelques réflexions sur la meilleure maniere de connoître à chaque instant la direction horisontale ou verticale dans les vaisseaux agités.

§. XXXII.

QUAND on voit l'horison, on prend la ligne visuelle qui le rase pour la direction horisontale, & alors pour prendre hauteur, on se sert de l'Arbalête, ou du Quartier *Anglois* : ce dernier instrument a été fort perfectionné depuis quelque tems par M. Grand-Jean de Fouchi (Voyez les Mémoires de l'Académie R. des Sc. pour l'année 1740, *p.* 468), dont les nouveaux quartiers de réflexion mesureront les angles avec toute la précision qu'on peut souhaiter. Ils seront sur-tout très-utiles pour mesurer les distances de la Lune à deux étoiles fixes, & pour déterminer par-là la longitude du lieu. Quand on se trouve à même de se servir de cet instrument, il ne faut pas douter qu'il ne soit infiniment préférable à la fleche ; mais je ne sçais si on pourra s'en servir pendant que le vaisseau est fort agité, au lieu qu'on peut toûjours faire ses observations avec l'Arbalête, qui est moins exact, mais plus facile & plus commode. On sçait assez tous les défauts de cette méthode de prendre hauteur sur mer, en prenant pour la vraie direction horisontale, la ligne visuelle qui rase ou paroît raser l'horison visible. Je ne m'arrêterai donc point à les décrire ; cependant malgré tous

ſes inconveniens, je doute fort qu'on en puiſſe jamais trouver une meilleure, à moins que la mer ne ſoit preſque calme, auquel cas on pourra peut-être lui préférer la méthode que j'expoſerai ci-deſſous.

§. XXXIII.

QUAND on ne voit l'horiſon ou la ſurface de la mer que de fort près dans les crépuſcules, ou qu'on ne la voit pas du tout pendant la nuit, on ſe trouve entierement hors d'état de ſuivre la méthode ordinaire pour obſerver les hauteurs; c'eſt pourtant le cas principal de la queſtion propoſée par l'Académie. Que faire dans ces fâcheuſes circonſtances? Il faut ſans doute avoir recours à des principes tout nouveaux, à moins qu'on ne voulût ſe contenter de jetter dans la mer des ſignaux enflammés, ou de les faire tranſporter ſur l'eſquif: ce ſeroit plutôt couper que défaire ce nœud Gordien. Je ne promets pas de ſatisfaire à cette queſtion avec toute la préciſion qu'on pourroit ſouhaiter: mais peut-être que ce que je propoſerai ſera d'autant moins imparfait, que je l'ai examiné avec plus d'attention, & qu'il eſt fondé ſur les vrais principes de la méchanique, que j'ai expoſés au premier chapitre. Voici mes réflexions ſur cette matiere.

§. XXXIV.

IL eſt évident que lorſqu'on ſe trouve réduit à ne pouvoir mettre à profit ce qui ſe paſſe hors du vaiſſeau, on ne peut plus avoir d'autres moyens pour connoître la direction verticale ou horiſontale, que ceux-là mêmes dont on ſe ſert ſur terre, tels que ſont les pendules, les niveaux, &c. Tous ces inſtrumens reviennent au même,

étant fondés sur le même principe, qui est l'action de la pesanteur, toûjours perpendiculaire à la surface de la terre. Mais les agitations du vaisseau dérangeront continuellement l'état naturel de ces instrumens : il faudroit que la pesanteur fût infinie, pour qu'elles ne le fissent pas, ou que l'inertie fût infiniment petite ; & n'étant pas en notre pouvoir de changer ces choses, il me semble que tous nos efforts ne peuvent aboutir qu'à diminuer autant qu'il est possible, l'effet des agitations du vaisseau sur les pendules simples, & puis à déterminer la vraie verticale, qu'il est du tout impossible d'observer immédiatement, par d'autres circonstances qu'on pourra observer. Il est souvent impossible de connoître une chose par elle-même, qu'il est facile de déterminer par d'autres observations.

§. XXXV.

Si les agitations du vaisseau étoient tout-à-fait irrégulieres en tout sens, il seroit sans doute impossible de satisfaire à notre second point, & on seroit réduit à se contenter du premier. Mais je dois répéter ici ce que j'ai exposé au long dans le premier chapitre, sçavoir, que les agitations du vaisseau sont une espece de balancemens, qui se font suivant les loix du mouvement d'un pendule simple ; je ne prétens pourtant pas que cela soit ainsi à la rigueur ni toûjours : quand la mer est male ; quand deux mers se battent, en un mot, quand les lames & le vent sont tout-à-fait irréguliers, les agitations du vaisseau ne peuvent qu'être irrégulieres, inégales & fort incommodes : j'avoue que ce n'est pas alors le tems de mettre en pratique les regles que je vais donner; mais ces cas arrivent rarement, & quand on s'y trouvera, on pourra du moins saisir les intervalles les plus favorables.

§. XXXVI.

QUANT à notre premier point, qui eſt de diminuer les agitations d'un pendule ſuſpendu dans un vaiſſeau, nous avons marqué dans le premier Chapitre tout ce qu'il convient de faire. Voyez ſur-tout la note (γ) du §. IX ; & les deux exemples que j'y ai donnés, montrent combien il eſt important d'obſerver le plus près qu'on peut les regles que j'y ai données. Je ne me flatte pourtant pas qu'on puiſſe diminuer par-là les balancemens d'un pendule au point de pouvoir être négligés, & de pouvoir prendre la direction du pendule pour la vraie verticale. Je viens donc à l'examen de notre ſecond point, & c'eſt ſur-tout ici que j'ai beſoin de notre hypotheſe, touchant l'uniformité des balancemens du vaiſſeau ; plus on ſe trouvera dans le cas de cette hypotheſe, plus on pourra déterminer exactement la vraie verticale.

§. XXXVII.

SOIT donc dans la quatrieme Figure, A le point autour duquel le vaiſſeau eſt ſuppoſé faire ſes balancemens : AF une ligne verticale ; que l'angle MAF marque l'inclinaiſon moyenne du vaiſſeau couché ſur un de ſes bords, quelle que ſoit cette inclinaiſon. Suppoſons enſuite que la ligne AM faſſe des balancemens de côté & d'autre, & que pendant ces agitations elle ſe trouve dans une poſition quelconque AB. Soit au point M attaché un pendule Mm, & ſuppoſons que le point M ſe trouvant en B, le pendule Mm ait pris la ſituation BC, & qu'on tire la verticale BE ; il s'agit de déterminer l'angle CBE par des quantités qu'on pourra obſerver. Cet angle CBE ne doit

donc pas être déterminé par l'angle BAM, ni par MAF, qu'on ne sçauroit jamais connoître que fort grossierement; je ne veux pas même que l'on suppose la distance AM connue, car on ne pourroit déterminer le point A assez exactement, & ce point ne sçauroit être exactement tel que nous le supposons, c'est-à-dire, entierement en repos pendant les agitations du vaisseau; il suffit qu'il doit y avoir nécessairement un endroit qui soit agité fort peu.

§. XXXVIII.

Avant que de marquer comment on pourra s'y prendre pour résoudre ce Problême, je prierai le Lecteur de se rappeller les propriétés que j'ai démontrées dans le premier Chapitre, sur l'angle en question CBE, sçavoir *qu'il ne sçauroit manquer* d'être toûjours à peu près proportionnel à l'angle BAM, & que dans nos hypotheses il est parfaitement $= \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, en faisant $AM = L$, la longueur du pendule $Mm = l$, & la longueur du pendule simple isochrone avec les balancemens du vaisseau $= \lambda$: Voyez le §. x. Si les oscillations du pendule Mm ne se font pas dans le même plan avec les balancemens de la ligne AM, & que le pendule soit obligé de balancer dans un autre plan quelconque; si l'on suppose encore que la ligne AM fasse plusieurs sortes de balancemens, mais pourtant harmonieux entre eux, l'angle absolu CBE en sera à la vérité changé, mais il restera toûjours proportionnel à $\frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Il nous sera donc permis de supposer

$$CBE = H \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM.$$

en entendant par H une quantité constante quelconque;

qui sera la même, de quelque façon que le vaisseau soit agité, pourvû qu'il le soit uniformément pendant un petit espace de tems.

§. XXXIX.

SI nous supposons à présent qu'il y ait trois pendules tous attachés au point M, dont les longueurs différentes soient l, l' & l'', & que ces pendules ne puissent balancer qu'autour d'un même axe, il est clair que la quantité H, comme indépendante de la longueur du pendule, sera pour chacun de ces pendules la même : outre cela, quel que soit le point A, la distance AM ou L sera pareillement la même, comme aussi la longueur λ, & enfin l'angle BAM, qui ne dépend que des agitations du vaisseau. Soit à présent l'angle CBE pour le premier & le plus court pendule $l = A$, pour le pendule $l' = A'$, & pour le pendule $l'' = A''$, & nous aurons, en vertu de l'équation du précédent article, $A = H \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$

$$A' = H \times \frac{L}{\lambda - l'} \times BAM$$

$$A'' = H \times \frac{L}{\lambda - l''} \times BAM.$$

De ces trois équations on peut tirer ces deux analogies :

$$A : A' - A = \lambda - l' : l' - l$$

$$A : A'' - A = \lambda - l'' : l'' - l,$$

dans chacune desquelles le second terme peut être considéré comme connu, puisque $A' - A$ est l'angle compris entre le premier & le second fil, & $A'' - A$ est l'angle compris entre le premier & le troisieme fil, & que ces angles pourront être observés à chaque moment : faisons donc $A' - A = M$, & $A'' - A = N$, & nous aurons ces deux équations :

$$A = \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times M, \; \& \; A = \frac{\lambda - l''}{l'' - l} \times N;$$

moyennant lesquelles on aura en quantité purement connues :

$$\lambda = \frac{M(l' \times L'' - l \times l') - N(L' \times l'' - l \times l'')}{M(l'' - l) - N(L' - l)}$$

$$A = \frac{(l'' - l')MN}{(l' - l)N - (l'' - l)M}.$$

Donc la question de connoître la verticale, dépend entierement de la maniere d'observer les angles que font à chaque moment les trois pendules entre eux.

§. XL.

Si nous avions voulu considérer la quantité λ comme connue, nous n'aurions eu besoin pour connoître la vraie verticale, que des deux premiers pendules l & l', avec l'angle intercepté M, puisque nous avons trouvé $A = \frac{A - l'}{l' - l} \times M$. Cette formule seroit beaucoup plus commode pour le calcul, elle rendroit l'instrument pour prendre hauteur plus simple, & elle seroit souvent plus exacte. Il ne sera donc pas hors de propos de remarquer, que la quantité λ pourra se connoître assez au juste ; elle marque la longueur du pendule simple isochrone avec les agitations du vaisseau, quelque compliquées que soient ces agitations ; pourvû qu'elles soient devenues harmonieuses, elles seront tautochrones, quoiqu'elles puissent être plus tardives dans un tems que dans un autre ; cela dépend sur-tout du plus ou moins de lenteur dans le mouvement des lames. Or, on peut compter combien de tems emploient 20 ou 30 balancemens du vaisseau, par le moyen des battemens d'une montre, & par-là on connoîtra la longueur λ pour tel tems qu'on voudra ; & on la connoîtra assez exactement.

§. XLI.

Ces deux derniers articles montrent la maniere de déterminer la direction verticale par le calcul, & de la déterminer à chaque moment. Lorsqu'on voudra se contenter de reconnoître la position verticale pour un seul moment à chaque balancement du vaisseau, il sera très-facile de le faire sans aucun calcul, puisqu'on n'aura qu'à remarquer le moment auquel tous les pendules se trouvent réunis dans une même ligne, & leur direction commune sera la direction verticale. Un seul pendule même y peut suffire, en remarquant l'excursion entiere du pendule, & en en prenant la moitié; car le pendule sera vertical, lorsqu'il sera au milieu des points extremes.

§. XLII.

Voila les principes qui pourront nous conduire à la maniere de prendre hauteur sur mer pendant la nuit, quand on ne voit pas l'horison. Mais examinons auparavant quelles sont les circonstances les plus favorables à ces méthodes.

(α) Quant à la méthode des trois pendules, exposée au §. XXXIX, il faut remarquer que pour rendre les angles M & N sensibles, les pendules doivent être fort inégaux en longueur, & que le pendule le plus long ne doit pas différer beaucoup de la longueur λ, qu'on peut connoître par la méthode du §. XL. Le pendule le plus court, indiqué par l, doit être fort petit, & enfin le pendule moyen l' pourra être pris un peu plus petit que $\frac{1}{2}\lambda$. Cette remarque est d'autant plus importante, qu'une petite erreur dans les angles M & N peut causer, sans cette précaution, une

une grande erreur sur l'angle cherché A, & on ne doit pas espérer que lesdits angles M & N soient entierement justes, tant faute d'observation, que faute de précision dans les hypotheses. J'éclaircirai cette remarque par deux exemples opposés.

1°. Supposons premierement $\lambda=16$ pieds; $l=1$ pied; $l'=2$ pieds, & $l''=4$ pieds : le vrai angle $M=1°$; le vrai angle $N=3° 30'$, & nous trouverons que le vrai angle A doit être de 14°; & il seroit tel, si les hypotheses étoient exactement vraies, & qu'on n'eût commis aucune erreur dans les observations : mais si l'on avoit pris l'angle N trop petit de 15' on trouveroit pour les mêmes hypotheses, l'angle A de 26°, au lieu de le trouver de 14°, qui est sa juste valeur. Cette erreur seroit énorme, & devroit faire rejetter toute la méthode, si l'on ignoroit la source de l'erreur.

2°. Supposons en second lieu que les longueurs l, l', l'' & λ ayent été prises en raison de 1, 2, 4 & 5, en donnant toûjours 16 pieds de longueur à λ : soit le vrai angle $M=1°$, le vrai angle $N=9°$, & on trouvera le vrai angle $A=3°$. Posons derechef une erreur de 15' dans la mesure de l'angle N, au-dessous de sa juste valeur, & on trouvera l'angle A de $3 \frac{1}{23}$ degrés, de sorte que l'erreur ne seroit en ce cas que d'environ 3'. Ce dernier exemple nous est donc aussi favorable, que le premier nous a été contraire.

(ζ) Pour la seconde méthode du §. XL, je remarque que le pendule l' doit être un peu plus petit que λ, pendant que le premier pendule l doit être fort petit : par-là l'angle A deviendra d'autant plus petit, & l'angle M plus grand, & une erreur dans l'angle M sera presque insensible sur le vrai angle A, au lieu que sans cette précaution elle pourroit être fort grande. C'est ce que je vais encore

éclaircir par ces deux exemples, choisis pour notre dessein.

1°. Soit encore $\lambda = 16$ p. $l = 7$ p. $l' = 8$ p. le vrai angle $M = 1°$, & le vrai angle A sera de $9°$; mais si on avoit pris ce vrai angle M de 15′ trop petit, l'angle A en seroit devenu trop petit de 2° 15′, ce qui seroit encore une erreur beaucoup trop grande.

2°. Mais si on avoit pris $l = 1$ p. $l' = 15$ p. & qu'on suppose le vrai angle M de 14°, (car il sera beaucoup plus grand qu'auparavant) le vrai angle A ne seroit plus que d'un degré, & ensuite une erreur de 15′ dans l'angle M, ne feroit plus qu'une erreur d'environ une minute pour l'angle A.

(γ) Comme l'angle M sera d'autant plus grand que la longueur l est plus petite, & que la longueur l' approche davantage de λ, on pourra rendre cet angle aussi grand qu'on voudra, & par-là on distinguera mieux le moment que les deux pendules se réunissent, & qu'ils auront pris l'un & l'autre la direction verticale, & cette remarque concerne la troisieme méthode du §. XLI. Il ne faut pourtant jamais approcher la longueur d'un pendule de trop près de la longueur λ, parce que nos hypotheses n'étant pas entierement justes, leur défaut deviendroit en ce cas trop sensible.

§. XLIII.

CE que nous avons dit jusqu'ici, nous servira à l'intelligence des manieres que je proposerai tantôt, pour prendre hauteur sur mer quand on ne voit pas l'horison, & qu'on se trouve par-là destitué de tous secours ordinaires : mais il conviendra de faire auparavant quelques remarques sur les pendules dont il faudra se servir. Comme ces pendules ne doivent être susceptibles d'autre

mouvement, que parallelement au plan du quart-de-cercle, ou du demi-cercle, on voit bien que les fils chargés de poids, ne rempliroient pas cette condition, & qu'on doit leur substituer des pendules solides, qui ne puissent tourner qu'autour d'un axe perpendiculaire audit plan, & alors on doit entendre par la longueur du pendule, la distance entre le centre d'oscillation & le point d'appui. (§. XIII.)

Il y a deux manieres d'augmenter ces distances; la premiere est d'éloigner beaucoup le centre de gravité du point de suspension, & la seconde de l'en approcher beaucoup. Il faut adopter cette seconde maniere, pour ne pas allonger inutilement la verge du pendule, ce qui seroit sujet à plusieurs inconvéniens; on pourra donc rendre les longueurs l, l' & l'' aussi grandes qu'on voudra, avec des verges aussi petites qu'on voudra. On peut aussi diminuer *tant qu'on veut lesdites longueurs*, sans raccourcir les verges, en jettant presque toute leur matiere autour de leur centre de gravité, & en les suspendant près du centre de gravité; ce qui découle du théoreme des balancemens brachistochrones des corps, qu'on a démontré dans les ....

Les verges qui doivent servir de pendules, pourront être examinées avant que de les appliquer au demi-cercle, en les faisant balancer, & en comptant le nombre de leurs oscillations pendant un certain tems, d'où l'on connoîtra fort exactement la distance de leur centre d'oscillation au point d'appui.

Comme on peut se trouver dans des circonstances différentes, qui demandent les longueurs l, l' & l'', & surtout les deux dernieres, tantôt plus petites, tantôt plus grandes, (voyez les notes du §. XLII.) on pourra ajoûter aux verges une piece mobile tout le long de la verge, par le moyen de laquelle on pourra donner telle valeur qu'on

voudra à ces longueurs, après avoir marqué les points où il faudra arrêter cette piece mobile pour cet effet, & ces points pourront être déterminés, soit par le calcul, ou par des expériences préalables.

§. XLIV.

Il est encore à remarquer, que lorsqu'une des distances l, l' ou l'' seroit plus grande que λ, l'angle que le pendule feroit avec la verticale, en deviendroit négatif, comme dans la seconde Figure; & si elle étoit infinie, le pendule resteroit par lui-même constamment dans sa situation verticale; comme les valeurs des angles A, A' & A'', données au §. XXXIX le marquent. Nous obtiendrions par-là immédiatement tout notre but, s'il étoit possible de se mettre dans le cas; mais on ne peut pas sans doute avoir des pendules infiniment longs, & il seroit inutile de suspendre les pendules par leur centre de gravité, puisqu'ainsi suspendus, ils seroient indifférens à toute situation, pendant qu'ils devroient affecter constamment leur situation verticale. Cette remarque peut pourtant être en quelque façon utile pour une autre vûe, que nous dirons ci-dessous.

Si l'on faisoit $l' = 2\lambda - l$, l'angle A' deviendroit négatif, & précisément égal à l'angle A, de sorte que les deux pendules l & l' feroient constamment un angle égal avec la verticale, & pour avoir cette verticale, il n'y auroit qu'à partager en deux également, l'angle compris entre ces deux pendules: il n'est pas difficile d'imaginer une construction qui oblige un rayon de se trouver toûjours au milieu des deux pendules, & alors ce rayon seroit de lui-même constamment vertical. Il est vrai que les angles négatifs, qui proviennent en prenant la longueur l' plus

grande que λ, ont beaucoup d'inconvéniens, & ſur-tout celui de ſe compoſer difficilement dans cet état d'harmonie que nous ſuppoſons ; mais il eſt bon de ne pas ignorer les reſſources que la théorie pure fournit, pour ſçavoir bien diriger ſes vûes dans ces recherches.

§. XLV.

VOICI à préſent comme on pourroit ſatisfaire à nos principes. *AHB* eſt un demi-cercle gradué (*Fig. 9.*), *mobile*, par le moyen d'une genouilliere, en tout ſens ſur ſon centre *C*, qui doit être en même tems ſon centre de gravité. *AD* & *BE* ſont les deux pinnules percées en *F* & *G*, pour laiſſer paſſer les rayons de l'aſtre qu'on veut obſerver. Il faut ajoûter au demi-cercle un petit axe perpendiculaire, *qui paſſe par le centre C*, & qui doit ſoûtenir trois regles librement mobiles autour de cet axe ; ces trois regles ſont deſtinées à faire l'uſage des trois pendules du §. XXXIX, indiquées par l, l' & l'', & dont par conſéquent les centres d'oſcillation doivent avoir les propriétés marquées au §. XLII. J'ai repréſenté ces trois regles par *MN*, *M'N'* & *M''N''* ; enfin, je demande qu'il y ait un reſſort, auquel, ſi l'obſervateur touche, les trois regles s'arrêtent tout auſſi-tôt dans la ſituation qu'elles auront eue au moment de l'obſervation : après cela on examinera à loiſir l'angle *N'CN*, que nous avons appellé *M*, & l'angle *N''CN*, que nous avons nommé *N*, ſur quoi la derniere formule du §. XXXIX, donnera l'angle *A* compris entre la regle *NM* & la verticale *CH*, c'eſt-à-dire, l'angle *NCH*, & ſi on ôte cet angle de l'angle *BCN*, qu'on pourra meſurer, on aura la vraie hauteur de l'aſtre *O*. Si les regles *M'N'* & *M''N''* ſe trouvoient du côté oppoſé, par rapport à la regle *MN*, tous ces angles deviendroient

négatifs, & il faudroit ajoûter l'angle NCH à l'angle NCB, pour avoir la hauteur de l'aſtre. Au reſte, l'Obſervateur après avoir dirigé le demi-cercle vers l'aſtre, aura la précaution de ne toucher au reſſort qu'au bout d'un certain tems, pour donner aux regles le tems de ſe mettre dans leurs balancemens réguliers.

§. XLVI.

Si l'on croit connoître la longueur λ avec aſſez de préciſion, pour pouvoir mettre en uſage la méthode du §. XL, on pourra ſe paſſer de la troiſieme regle $M''N''$, & ſimplement obſerver l'angle $N'CN$, & alors l'angle NCH ſera $= \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times N'CN$, & la hauteur de l'aſtre obſervé ſera $BCN \mp \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times N'CN$.

§. XLVII.

On pourroit encore profiter du §. XLI, en employant deux Obſervateurs, dont l'un obſerveroit le moment que les deux pendules ſe croiſent, & le marqueroit à chaque fois à haute voix, & il ne ſera pas difficile à l'autre Obſervateur, d'obſerver l'aſtre préciſément dans un de ces inſtans, pouvant s'y préparer par la ſucceſſion uniforme de ces momens, & les balancemens du vaiſſeau ſe faiſant aſſez lentement. Mais le premier Obſervateur ne doit pas ſeulement remarquer le moment que les deux pendules ſe croiſent, il doit encore obſerver ſur le demi-cercle, le point H où ils ſe croiſent, & le ſecond Obſervateur pourſuivra l'aſtre, non avec le demi-cercle, mais avec une alidade mobile, en prenant garde de ne pas toucher au demi-cercle; on pourroit mettre à l'alidade mobile,

une lunette garnie d'un micrometre, dont les fils seroient de différentes couleurs, & après s'être bien préparé, on observera, sans toucher davantage à l'alidade, le fil qui répondra à chaque fois à l'astre, & quand on auroit observé l'astre deux ou trois fois de suite, à peu près au même fil, & que l'autre Observateur auroit pareillement observé le point *H* à peu près au même endroit, on pourroit compter beaucoup sur cette observation. Cette méthode demande sans doute que les deux Observateurs concertent ensemble la maniere de faire leurs observations, & de s'avertir mutuellement, pendant l'observation, de plusieurs points; & elle a cet avantage par-dessus les deux premieres, qu'elle n'a pas besoin de ce ressort qui arrête les pendules.

§. XLVIII.

ENFIN les §§. XIII & XLIV nous fournissent une quatrieme maniere de prendre hauteur : elle est fondée sur ce que les corps suspendus par leur centre de gravité, conservent d'eux-mêmes une situation parallele à elle-même. Il est certain qu'une grande masse, librement mobile sur son centre de gravité, ne se détournera pas sensiblement de sa position pendant un tems considérable, de quelque façon qu'elle soit transportée par son centre de gravité : cette considération m'a fait naître une telle idée. On pourroit unir le demi-cercle *AHB*, garni d'une alidade mobile, à une piece fort lourde & pesante, en faisant que le centre de gravité du systême soit précisément en *C*. Supposons que *AB* se trouvât pour un moment dans sa situation horisontale, il est sûr qu'elle ne s'en éloignera pas sensiblement pendant assez long-tems, & que l'Observateur pourroit cependant prendre hauteur à son aise. Je demande donc encore l'aide d'un autre Observateur, qui

dirige continuellement le demi-cercle, de façon que le pendule s'éloigne toûjours également, dans ses balancemens de chaque côté, du point de 90°. J'ose assûrer que cela lui sera fort facile, & qu'il n'aura pas beaucoup à faire pour cela : il pourra aussi, s'il l'aime mieux, employer le secours de deux pendules, & faire qu'ils se croisent au point de 90°. De l'une & de l'autre façon, il pourra être sûr que *A B* aura été constamment dans sa situation horisontale, & rien ne gênera cependant l'autre Observateur, de prendre hauteur tout comme sur terre. Cette méthode sera peut-être la plus facile pour la pratique.

Remarquons enfin que dans toutes ces méthodes, il faut être attentif à retenir le demi-cercle à peu près dans le plan vertical, sur-tout quand la hauteur de l'astre est un peu grande.

§. XLIX.

JE finirai ce Chapitre par une réflexion générale sur ce qu'il renferme. On aura remarqué sans doute, que je n'ai rien avancé avec précipitation, ou sur de légeres apparences. J'avoue que nos méthodes sont encore sujettes à quelques imperfections ; mais je doute si l'on pourra jamais aller beaucoup plus loin, si ce n'est peut-être qu'on pourra perfectionner davantage ce que j'ai dit, & que je n'ai presque fait qu'indiquer. J'ai tâché de mettre à profit toutes les circonstances favorables, & cela en suivant toûjours les principes incontestables de méchanique, qui m'ont fait reconnoître en même tems, combien étoient trompeuses les premieres apparences de quelques autres manieres, que je m'étois imaginées autrefois. Mais si d'un côté un amour sincere de la vérité m'empêche de parler avec trop de prédilection de nos manieres de prendre hauteur sur mer, quand on ne voit pas l'horison, je me flatte

flate d'un autre côté, qu'on ne leur voudra rien ôter de ce qu'elles ont de réel & bien fondé. Elles soûtiendront l'examen le plus rigoureux de la théorie, & tout leur succès dans l'exécution, dépendra particulierement de cette question : Si on ne se trouve pas souvent dans le cas que le vaisseau balance presque régulierement & uniformément, pendant quelque petit intervalle de tems. Les raisons que j'ai alléguées au premier Chapitre, jointes à l'expérience que j'en ai faite moi-même, doivent nous engager à regarder cette hypothese avec quelque complaisance ; & plus on se trouvera dans le cas, plus j'aurai de confiance à recommander nos méthodes, sur-tout si les agitations du vaisseau sont en même-tems peu sensibles. Je suis sûr même que souvent les circonstances seront si favorables, que ces manieres de prendre hauteur pourront être préférées dans le jour, aux manieres ordinaires, puisqu'enfin le secours de l'horison visible souffre plusieurs inconvéniens. Dans un calme parfait, nos méthodes seroient absolument les mêmes que par terre, pendant qu'on ne s'avisera jamais sur terre, de prendre pour la vraie horisontale la ligne qui rase la surface de la mer, sans parler de plusieurs autres défauts de l'Arbalête, & même du Quartier Anglois employés à cet usage.



CHAPITRE IV.

Contenant les Considérations Astronomiques nécessaires à notre sujet.

§. L.

JE ne m'arrêterai pas ici aux premiers préliminaires ; on sçait que toute la question dépend de la maniere de déterminer le passage d'un *astre connu* quelconque, au méridien du lieu où l'on se trouve ; il faut donc que l'on connoisse la position de l'astre qu'on veut observer, & c'est en quoi notre sujet differe de celui que l'Académie a proposé pour l'année 1729 : car on peut trouver la hauteur du pole, que l'on demandoit alors, moyennant un astre dont on ignore entierement la position, en observant trois fois sa hauteur verticale avec les deux intervalles de tems, d'où on peut déduire la hauteur du pole, la déclinaison de l'astre, & le moment de son passage au méridien, comme j'ai démontré dans le IV vol. des Mémoires de Petersbourg, *pag.* 89. quoiqu'un sçavant Géometre crût ce Problême indéterminé ; ainsi cette condition ne restreint pas notre présent Problême plus qu'il ne faut : il faudra toûjours supposer, que l'astre qu'on veut observer, le Soleil & le pole, fassent un triangle entierement connu ; après quoi nous aurons deux cas à considérer : le premier est de supposer la hauteur du pole connue, & le second, de traiter cette hauteur comme entierement inconnue.

§. LI.

IL est facile de voir, qu'en supposant l'élévation du

pole donnée, on n'a qu'à observer une seule fois la hauteur d'un astre connu, pour en déterminer l'heure; car l'arc du méridien, depuis le Zénith jusqu'au Pole, sera donné, puisque c'est le complément de l'élévation du Pole; l'arc vertical, depuis le Zénith jusqu'à l'astre, sera pareillement connu par l'observation; & enfin l'arc compris entre le pole & l'astre, est donné par la déclinaison de l'astre connue; les trois arcs forment donc un triangle connu, & on y trouvera par la Trigonométrie sphérique, l'angle au pole, qui mesure le tems qu'il faut à l'astre pour arriver jusqu'au méridien.

On ne sçauroit douter que ce ne soit ici la meilleure méthode Astronomique, & la plus simple; car on n'a pas toûjours le tems de prendre de bonnes hauteurs correspondantes, & d'ailleurs celles-ci n'ont aucun autre avantage ici, que celui d'abréger le calcul, qu'on doit compter pour rien, quand il s'agit de perfectionner les Arts & les Sciences: au reste, elle est trop facile pour qu'elle ait pû échapper aux Astronomes: mais je ne sçache pas qu'on ait examiné de même ce qu'il faut faire, pour mettre cette méthode dans sa plus grande perfection; il ne m'est donc pas permis de me dispenser de cette recherche.

§. LII.

LE grand but doit être ici, qu'une même erreur commise dans l'observation, influe le moins sur l'heure cherchée. Or il est évident que pour cet effet, il faut choisir de tous les astres qu'on peut observer, celui qui demande le moins de tems pour s'élever ou se baisser d'un petit arc vertical donné, à moins qu'il n'y ait d'autres inconvéniens de plus grande conséquence. Supposons premierement un astre dont on veuille prendre la hauteur, & examinons

dans quel point de ſon parallele il doit ſe trouver, pour être dans ſa ſituation la plus avantageuſe. Pour cet effet, ſoit le ſinus total $=1$, le ſinus de l'élévation du pole $=s$, & le ſinus de la déclinaiſon de l'aſtre $=t$, & qu'il s'agiſſe de déterminer la hauteur verticale de l'aſtre, telle que le moment de l'obſervation ſoit le plus favorable; je dis qu'il faut ici diſtinguer deux cas.

Le *premier cas* eſt quand s eſt plus petit que t, & dans ce cas, il faut que l'aſtre ſe trouve au point où le vertical touche le parallele, c'eſt-à-dire, dans le point où l'angle compris entre le vertical, qui paſſe par l'aſtre & l'arc tiré du pole à l'aſtre, ſoit un angle droit, & un tel point exiſte toûjours dans le cas préſent, & le calcul m'a fait voir, que l'aſtre ſe trouve audit point, lorſque le ſinus de la hauteur de l'aſtre eſt $=\frac{s}{t}$. Le Théorème enſeigne le moment qu'il faut attendre pour obſerver un aſtre donné, ou quel eſt de tous les aſtres d'une même déclinaiſon, celui qu'il faut obſerver dans un tems donné. Il nous fait voir auſſi, que les aſtres qui ſe trouvent du même côté avec le pole, doivent être préférés aux aſtres qui ſont dans l'hémiſphere oppoſé, ceux-ci ne nous permettant pas de profiter de cet avantage; & la regle nous dit alors ſimplement, qu'il faut obſerver l'aſtre le plus près de l'horiſon que l'on peut. Soit, par exemple, l'élévation du pole de 30°, la déclinaiſon de l'aſtre de 45°, on aura $\frac{s}{t}=\sqrt{\frac{1}{2}}$, qui marque qu'il faudroit obſerver la hauteur de cet aſtre, lorſqu'elle eſt à peu près de 45°; ou s'il y avoit pluſieurs aſtres de la même déclinaiſon, & qu'on voulût faire l'obſervation ſur le champ, il faudroit choiſir celui qui approche davantage de cette hauteur.

Le *ſecond cas* eſt celui qui fait s plus grand que t; il n'y a alors aucun vertical qui touche la parallele de l'aſtre, &

il faut recourir à la méthode des plus grands & des plus petits, en exprimant analytiquement l'angle compris entre le vertical tiré à l'aſtre, & l'arc tiré du pole à l'aſtre; & en faiſant que cet angle ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. En ſatisfaiſant à cette condition, j'ai trouvé qu'il faut que le ſinus de la hauteur de l'aſtre ſoit $= \frac{t}{s}$. Si donc l'élévation du pole étoit, par exemple, de 45°, & la déclinaiſon de l'aſtre de 30° du côté du pole, on trouveroit encore $\frac{t}{s} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, & il faudroit derechef attendre que la hauteur de l'aſtre fût d'environ 45° pour l'obſerver, ou choiſir de tous les aſtres de la même déclinaiſon, celui qui approcheroit davantage de cette hauteur, ſi on ne vouloit pas différer l'obſervation.

Les Théorèmes que je viens de donner ſont ſouvent de *grande conſéquence*, & les obſervations de jour, à faire ſur le Soleil, demandent la même attention. On peut bien avoir quelques raiſons pour ne les pas ſuivre ponctuellement: mais il ne faudra jamais s'en éloigner beaucoup. Si on vouloit prendre la hauteur d'un aſtre qui ſeroit près du méridien, dans la vûe de trouver l'heure, la moindre erreur dans l'obſervation, jetteroit une erreur énorme ſur l'heure. Les Théorèmes ſont même utiles ſur terre, pour prendre à propos les hauteurs correſpondantes du Soleil, ou d'un autre aſtre, autant que les réfractions permettent d'y être attentif. En examinant les obſervations qui ſont rapportées par M. le Monnier, dans ſon Hiſtoire céleſte, Ouvrage que le Public ne ſçaura jamais reconnoître autant qu'il le mérite, j'ai remarqué qu'on n'a pas toûjours aſſez bien choiſi le tems de prendre ces hauteurs correſpondantes, pour régler la pendule, ni celles des étoiles, dont on vouloit déterminer l'aſcenſion droite. J'avoue que ces remarques ſont de fort petite

conséquence à l'égard des observations sur terre, à cause de la grande précision des observations : mais il me semble aussi que la grande perfection de l'Astronomie, de laquelle nous sommes redevables aux auspices de l'Académie, ne doit plus nous permettre de négliger le moindre avantage.

§. LIII.

Nous venons de déterminer le point du parallele donné le plus avantageux : il reste à déterminer quel est le parallele le plus utile pour l'exactitude de l'observation principale. Je dis donc à cet égard, & la chose est facile à voir, que tout le reste étant égal, il faut choisir de tous les astres, celui qui a la moindre déclinaison, & un tel astre doit toûjours être observé le plus près de l'horison qu'il est possible : l'incertitude des réfractions est à la vérité un obstacle à cette regle ; mais il faudroit sur mer, se trouver dans des circonstances extrèmement favorables, pour porter quelque attention à cet inconvénient. Supposé cependant qu'on ne veuille, ou qu'on ne puisse observer aucun astre au-dessous d'une certaine hauteur, dont le sinus soit $= q$, je dis que la déclinaison la plus utile aura pour son sinus $s\,q$; si donc l'élévation du pole étoit de 30°, & qu'on prenne pour q le sinus de 10°, la déclinaison la plus utile seroit de 4° 59′ du côté du pole.

On peut remarquer encore, qu'il faudra éviter les astres, qui, dans leur culmination, passent près du Zénith, ou dont la déclinaison est à peu près égale à la hauteur du pole, parce que ces astres devroient être observés, selon nos regles, près du Zénith, & que ces observations sont incommodes, & plus incertaines sur mer.

§. LIV.

EXAMINONS à préſent quelle ſera la meilleure maniere de trouver l'heure, en ſuppoſant la hauteur du pole inconnue. Le ſecours des hauteurs correſpondantes eſt excellent ſur terre, mais il ne l'eſt pas toûjours ſur mer, où l'on doit profiter quelquefois d'un moment de beau tems; d'autres fois on ſe trouvera trop près de l'aube du jour, pour pouvoir exécuter cette méthode avec tant ſoit peu de *ſuccès* pendant la nuit : j'en parlerai cependant en ſon lieu. Voici donc deux autres méthodes plus générales, dont la premiere renfermera celle des hauteurs correſpondantes, comme un cas particulier. La *premiere méthode* eſt de prendre deux fois la hauteur d'un même aſtre, en remarquant auſſi l'intervalle de tems d'une obſervation à l'autre. La *ſeconde méthode* conſiſte à prendre la hauteur de deux aſtres différens, ſoit en même tems, ſoit ſucceſſivement l'une après l'autre, en obſervant encore l'intervalle de tems.

§. LV.

VOICI le calcul pour la premiere méthode. Soit HZH le Méridien (*Fig.* 10.); Z le Zénith; P le Pole; HH l'horiſon; a la poſition de l'aſtre à la premiere obſervation; b ſa poſition à la ſeconde obſervation : qu'on tire au pole les arcs aP & bP, comme auſſi les arcs verticaux Zad & Zbc; il y aura de connu l'arc aP ou bP, qui fait le complément de la déclinaiſon de l'aſtre; enſuite l'angle aPb, qui fait l'angle horaire d'une obſervation à l'autre; & enfin les arcs Za & Zb, qui font les complémens des hauteurs de l'aſtre obſervées : qu'on joigne les points a & b par l'arc de grand cercle ab, qui ſe trouvera comme faiſant

la base du triangle $a P b$, duquel on connoîtra les deux côtés égaux avec l'angle intercepté; de-là on connoîtra aussi tout le triangle $a Z b$: dans ces deux triangles connus, on cherchera l'angle $P b a$, & l'angle $Z b a$, dont la différence donnera l'angle $Z b P$. On connoîtra donc dans le triangle $Z b P$, les deux côtés $Z b$ & $P b$, avec l'angle intercepté $Z b P$, & ainsi on pourra calculer l'angle $Z P b$, qui fait l'angle horaire cherché entre la seconde observation, & le moment du passage de l'astre par le méridien. Si l'on cherche aussi le côté $Z P$, on en connoîtra en même tems le complément de l'élévation du pole.

§. LVI.

J'AJOUTERAI ici les remarques les plus essentielles qu'on peut faire, sur cette maniere de trouver l'heure.

(a) Il faut toûjours faire les deux observations fort éloignées l'une de l'autre, & si les circonstances ne permettoient pas d'accorder pour le moins une heure d'intervalle entre les deux observations, il vaudroit mieux sur mer, suivre la méthode du §. LI, sur une simple estime de la hauteur du pole, qu'on connoît toûjours à peu près.

(b) Comme la premiere observation sert proprement à déterminer l'heure, & la seconde à déterminer la hauteur du pole, on pourra faire l'une des observations, lorsque l'astre se trouve à peu près dans cette situation, que nous avons déterminée au §. LII, & la seconde, lorsque l'astre est près du méridien : cette seconde observation déterminera immédiatement la hauteur du pole, à cause de la déclinaison donnée de l'astre, après quoi la premiere observation donnera l'heure encore, par la méthode du §. LI; on abrégera par-là le calcul. Si depuis la premiere observation

observation jusqu'à la seconde, le vaisseau avoit fait beaucoup de chemin en latitude, il faut en faire l'estime, & réduire la hauteur du pole de la seconde observation, à celle qui répondroit à la premiere.

(*c*) Quand on a tout le loisir d'observer l'astre des deux côtés du méridien, sous un grand intervalle de tems, on pourra encore éviter toute la peine du calcul, en suivant la méthode des hauteurs correspondantes, qui est comprise dans cette méthode générale. On pourra encore avoir besoin ici d'une petite correction, par rapport au chemin du vaisseau, depuis la premiere jusqu'à la derniere observation, tant en longitude qu'en latitude. Cette correction se fera, en supposant que le moment de la culmination de l'astre réponde à l'endroit où le vaisseau se sera trouvé au milieu entre les deux observations; c'est-à-dire, *que le méridien trouvé* par la regle, ne sera pas pour l'un des deux endroits où l'on aura fait l'observation, mais pour le milieu de ces deux endroits.

§. LVII.

LA méthode précédente servira particulierement pour les observations de jour, où on ne voit que le Soleil, & où on ignore en même tems la hauteur du pole: mais pour les observations de nuit, on sera presque toûjours dans des circonstances à pouvoir suivre la seconde méthode du §. LIV; & par-là on évitera l'inconvénient de ce grand intervalle de tems entre les deux observations, nécessaire à la méthode précédente.

Supposons qu'on ait pris la hauteur de deux différens astres en même tems, le calcul pour en trouver l'heure, sera entierement le même que celui du §. LV. Car, supposé l'un des astres en *a*, l'autre en *b* dans la même Figure,

expliquée audit §. LV, alors *ab* marquera la distance des deux astres connus, qu'on peut calculer par leur position en longitude & en latitude, marquées l'une & l'autre dans les Tables; *Pa* & *Pb* seront les complémens de leurs déclinaisons données, quoiqu'inégales; *Za* & *Zb* sont les complémens de leurs hauteurs observées. On connoît donc encore entierement les triangles *aPb* & *aZb*, & on trouvera l'angle *ZbP*, en prenant la différence des angles *Pba* & *Zba*, après quoi on connoît tout le triangle *ZPb*, & par conséquent l'angle *ZPb*, qui détermine le moment du passage de l'astre *b* par le méridien.

§. LVIII.

COMME il est cependant impossible de prendre deux hauteurs en même tems, on pourra les prendre immédiatement l'une après l'autre, & un petit intervalle de tems ne peut être de conséquence dans les observations sur mer, si sujettes à un grand nombre d'imperfections : si cependant on veut, ou si on croit y devoir faire attention, il faudra observer l'intervalle de tems de la premiere observation à la seconde, & puis faire le calcul comme il suit.

Supposons qu'à la premiere observation on ait observé l'astre en *a*, & qu'au même moment l'autre astre se soit trouvé en *b* : considérons ensuite, que du moment de la premiere observation jusqu'à la seconde, l'astre soit venu de *b* en *ϐ*, & tirons les arcs *ϐP*, *ϐZ* & *ϐa*, l'angle *ϐPb* sera donné par l'intervalle de tems observé; qu'on ajoûte cet angle à l'angle *bPa*, qui est toûjours connu par la position mutuelle de deux astres, & la somme marquera l'angle *ϐPa*; de-là on pourra calculer le côté *ϐa*, & ensuite l'angle cherché *ϐPZ*, tout comme dans le précédent article.

§. LIX.

Pour bien choisir les deux astres, on pourra faire le même raisonnement que nous avons fait dans la note *(b)* du §. LVI. On choisira l'astre *a*, qui contribue le plus à déterminer l'heure, conformément aux regles des §§. LII & LIII, & l'autre astre *b*, qui doit servir particulierement à trouver la hauteur du pole près du méridien, sans se mettre beaucoup en peine de sa déclinaison. Ce sont là les *positions* les plus avantageuses.

Si l'astre *b* a été observé assez près du méridien, pour que sa hauteur observée ne puisse pas différer sensiblement de sa vraie hauteur méridienne, elle déterminera par sa déclinaison donnée immédiatement, la hauteur du pole, & nous mettra en état de calculer le passage de l'astre *a* au méridien, par le calcul fort simple du §. LI: mais hors de ce cas, il faudra faire le calcul comme nous avons dit au §. LVII, si les deux observations ont été prises fort près l'une de l'autre; ou conformément au §. LVIII, si les deux observations ont été éloignées.

Cette méthode a ce grand avantage sur la précédente, qu'un moment de beau tems suffit pour la pratiquer : on ne craint ici ni les nuages, ni un trop promt retour du jour; elle ne demande non plus cette correction toûjours douteuse, que demande le chemin que le vaisseau a fait d'une observation à l'autre.

§. LX.

Voila nos méthodes générales de déterminer le moment du passage d'un astre au méridien, qui, par le moyen des Tables des ascensions droites, fera connoître

le passage du Soleil au méridien, & par conséquent l'heure cherchée. On n'a qu'à faire toutes les combinaisons des conditions, qui font de notre sujet un Problème déterminé, & qu'à connoître très-superficiellement la nature des observations Astronomiques qu'on peut faire sur mer avec quelque succès, pour être persuadé d'abord que nos méthodes de trouver l'heure sur mer, sont les meilleures qu'on puisse donner dans l'Astronomie, & cela tant relativement aux autres, que par rapport à elles-mêmes. Il seroit facile d'en imaginer un grand nombre d'autres, mais ce seroit s'alembiquer inutilement l'esprit. J'en dirai cependant encore une, qui me paroît pouvoir mériter quelque attention particuliere.

§. LXI.

VOICI cette derniere méthode, pour le cas où la hauteur du pole est connue. Elle consiste simplement à attendre & observer le moment, que deux astres connus quelconques se trouvent dans un même vertical; après quoi on fera le calcul comme il suit.

Soit P le pole; (*Fig.* 11.) Z le zénith; HH l'horison; Zc le vertical qui passe par les deux astres a & b, & qu'on tire les arcs aP & bP; on cherchera d'abord dans le triangle connu aPb, l'angle abP, dont le complément à deux droits donnera ensuite l'angle ZbP, qui déterminera le triangle ZbP, de sorte qu'on y pourra trouver l'angle cherché bPZ.

Si la hauteur du pole n'étoit pas connue, on pourroit faire une pareille observation sur deux autres astres, en remarquant aussi l'intervalle de tems entre les deux observations: car on en peut encore déduire le passage de l'un des astres par le méridien, & cela par la simple résolution

de plusieurs triangles, ce que je me contenterai d'avoir simplement indiqué, pour n'être pas trop prolixe; je ne dirai rien non plus, par la même raison, sur le choix des astres, qu'il faudroit faire, quoique très-essentiel à cette méthode. Mon but principal, n'est ici que de faire voir, que sans connoître immédiatement aucune hauteur, on peut trouver l'heure & même l'élevation du pole, uniquement par le passage de deux astres à un même vertical; je dis sans connoître *immédiatement* aucune hauteur, parce que les hauteurs des astres observés, peuvent se déterminer par le calcul. Voilà donc en même tems une maniere de prendre hauteur sans aucun instrument gradué, sans connoître aucun angle, & par le seul secours de la direction verticale, quoique cette direction ne soit connue que par des momens interrompus. Ces sortes de méthodes particulieres méritent donc d'autant plus d'attention, que par nos méthodes exposées au troisieme Chapitre, on peut à chaque balancement du vaisseau, reconnoître la situation verticale des regles *MN* & *M'N'*. Le §. XLVIII nous fournit même une maniere facile & assez exacte de conserver la direction *AB* (*Fig.* 9.) constamment dans sa direction horisontale, de sorte que si on y ajoûte une regle immobile perpendiculaire, celle-ci conservera constamment sa direction verticale. Je suis sûr même que dans les tourmentes violentes, on pourroit trouver l'heure à peu près, sur la simple estime du passage de deux astres à un même vertical; l'homme se formant une habitude naturelle à reconnoître la position verticale avec une grande exactitude, qui sera même surprenante & incroyable, dans ceux qui s'y seront habitués & perfectionnés; & si l'on vouloit faire estimer par un grand nombre de personnes ainsi habituées, le moment d'un tel passage, & puis prendre l'estime moyenne, en rejettant les estimes manifestement

fausses, elle ne pourroit manquer d'être fort juste; n'y ayant absolument point de raison pourquoi on devroit se tromper, plutôt d'un côté que d'un autre.

§. LXII.

Je ne sçais si les méthodes que je viens de donner sont toutes nouvelles : si d'autres les ont remarquées & décrites avant moi, comme cela se peut très-facilement, je n'aurois pas manqué de les citer, si je l'avois sçu. Mon intention n'a pas tant été de donner de nouvelles méthodes, que d'exposer les meilleures.

Je ne dirai rien d'un grand nombre de réductions & de corrections qu'il faut faire, tant par terre que sur mer : elles sont connues de tous les Astronomes, & devroient l'être de tous les bons Pilotes. Toutes les questions Astronomiques dépendent absolument les unes des autres, & on ne sçauroit bien traiter l'une, sans un examen exact de toutes les autres. On m'excusera donc, si je n'entre pas dans un plus grand détail, puisque pour le faire, il faudroit tout un cours tant d'Astronomie, que de Navigation. S'il m'étoit cependant arrivé d'omettre quelques éclaircissemens essentiels, je tâcherai d'y suppléer, si on vouloit bien me faire l'honneur de me les demander. C'est dans cette vûe que j'ajoûterai mon nom dans un billet cacheté, qu'on pourra ouvrir à tout évenement, si on le trouve à propos.



Fig. 3.

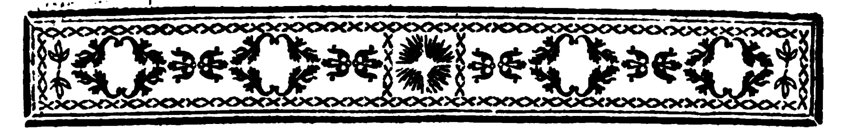
Fig. 4.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8

Fig. 9.



SUITE DES RECHERCHES MECHANIQUES ET ASTRONOMIQUES, &c.

MARQUÉES PAR LA DEVISE

Et quandoque Olitor fuit opportuna locutus.

Qui tend principalement à fournir aux Navigateurs les moyens Méchaniques les plus sûrs pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations dont on peut conclurre l'heure.

Est aliquà prodire tenùs, si non datur ultra.

§. 1. La recherche des moyens les plus sûrs pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations Astronomiques, m'a toûjours paru des plus intéressantes pour la Navigation. J'en ai fait l'objet de mes méditations déja depuis l'année 1728, que l'Académie avoit proposé pour sujet : *Quelle est la meilleure méthode d'observer les hauteurs sur mer, par le Soleil, & par les Etoiles, soit par des Instrumens déja connus, soit par des Instrumens de nouvelle invention*, sur lequel j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie un Discours, qui portoit la même devise que j'ai prise il y a deux ans. Je croyois alors que les fluides dans des tuyaux communicans, conserveroient mieux le niveau, qu'un fil chargé d'un poids ne

conſerve ſa ſituation verticale : mais je n'avois pas aſſez examiné cette idée ; & y ayant renoncé bien-tôt après, j'ai ſouvent penſé depuis, pour ma propre ſatisfaction, à d'autres moyens plus ſûrs & plus exacts, de pouvoir faire en mer les obſervations Aſtronomiques, mais toûjours ſans aucun ſuccès, juſqu'à ce qu'animé par le ſujet propoſé par l'Académie pour l'année 1745, je me ſuis appliqué de nouveau à cette matiere, ne déſeſpérant pas d'imaginer enfin quelque expédient, d'autant que je m'étois exercé avec toute l'application poſſible, à connoître les loix méchaniques qui m'y pouvoient conduire. Ces efforts réitérés m'ont enfin mené aux expédiens que j'ai expoſés au long, dans les recherches que j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie il y a deux ans. Les trois quarts de ces recherches ne tendent qu'à cette fin, que je prévoyois bien devoir être principalement celle de l'Académie, puiſque les théories Aſtronomiques ſont aſſez connues. Depuis ce tems, j'ai toûjours été, je l'avoue, fort ſatisfait des principes, ſur leſquels ſont fondés les moyens que je propoſe. J'oſe dire plus, & je l'oſe dire avec confiance, que ces principes ſont les ſeuls qu'on puiſſe mettre à profit pour notre ſujet : mais j'avoue auſſi que j'ai été moins content de l'uſage que j'en ai fait. Si quelque autre a ſuivi la même route, il peut avoir propoſé de meilleurs moyens pour faire ces obſervations la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon ; ſinon il n'aura rien fait du tout, & ſe ſera laiſſé tromper par de fauſſes apparences, comme cela m'eſt arrivé autrefois. J'ai fait ces mêmes réflexions au §. XLIX de mes recherches. N'étant donc pas perſuadé qu'il fût impoſſible de faire une application plus heureuſe de nos principes, je n'ai ceſſé d'y penſer, même après avoir déja envoyé à Paris ma piece, quoique je ne cruſſe pas alors qu'un plus grand ſuccès pût m'être de quelque utilité

utilité auprès de l'Académie, n'ayant plus pour but que l'avancement des Sciences & des Arts, si j'étois assez heureux d'y pouvoir contribuer. Il m'a paru que ces derniers efforts n'avoient pas été tout-à-fait sans succès, & j'en ai eu d'autant plus de plaisir, d'apprendre le jugement de l'Académie sur le prix de 1745, qui me met à même de soumettre encore mes nouvelles idées à ses lumieres. Je me propose donc de mettre mes principes & leur nécessité dans un plus grand jour; de faire quelques remarques sur l'application que j'en ai faite, & d'exposer surtout, les nouvelles idées que je me suis formées. Tout cela fera une espece de Commentaire de ma premiere Dissertation, que je prie par conséquent le Lecteur d'honorer de son attention, avant que de commencer la lecture de ces additions.

§. 2. *Il est évident* que pour faire les observations la nuit, quand on ne voit pas l'horison, il faut nécessairement avoir recours aux mêmes instrumens qu'on emploie sur terre. Car ni l'Arbalête, ni le Quartier Anglois, ne peuvent être en ce cas d'aucun usage. Tous ces instrumens sont destinés à la mesure de certains angles que les astres font, soit rélativement au ciel, soit rélativement à l'horison de la terre; & ces derniers, qui sont toûjours requis pour pouvoir trouver l'heure, demandent tous qu'on connoisse la direction horisontale. Le seul principe pour connoître cette direction, est l'action de la pesanteur, toûjours perpendiculaire à l'horison: mais l'action de la pesanteur est continuellement troublée & dérangée par l'agitation du vaisseau; & c'est à cet inconvénient qu'il faut tâcher de remédier. Voilà un Problème bien vague; on ne sçait par où commencer. On se formera mille idées, & après les avoir examinées chacune à part, on les rejettera toutes l'une après l'autre. J'ai donc d'abord tâché de

couper le chemin à toutes les tentatives inutiles, & voici comme je m'y suis pris.

§. 3. Tout ce qui est affermi au vaisseau fait les mêmes mouvemens angulaires, & ne sçauroit servir à donner une certaine direction : la pesanteur alors n'agit en rien, & le corps est simplement emporté par l'agitation du vaisseau ; il faut donc laisser au corps une certaine liberté de recevoir & de suivre l'impression de la pesanteur. Pour recevoir entierement l'impression de la pesanteur, il n'y a qu'un moyen, sçavoir de le détacher du vaisseau, & de le laisser tomber : mais la vitesse initiale & incertaine, que l'agitation du vaisseau auroit donnée au corps au premier moment qu'on l'eût détaché, lui feroit décrire une parabole indéterminée, de laquelle on ne pourroit rien conclurre pour la direction verticale. Il est vrai que si l'agitation du vaisseau pouvoit être censée uniforme pour un petit intervalle de tems, la route parabolique du corps tombant, ne laisseroit pas de faire une ligne droite verticale, par rapport aux objets unis au vaisseau ; & la considération de ce principe m'a fait penser qu'on pourroit ajoûter au quart-de-cercle, une clepsidre à mercure, dont le filet serviroit à mettre le quart-de-cercle à chaque moment dans sa juste situation, ou à en connnoître l'inclinaison. J'ai même examiné quelles précautions on pourroit prendre pour tirer le plus grand avantage de ce moyen, & je suis sûr qu'on pourroit perfectionner assez cette méthode, pour rendre les erreurs fort peu sensibles : mais j'ai meilleure opinion des methodes que j'ai déja données dans le troisieme Chapitre de mes Recherches, & beaucoup meilleure encore de celle que je donnnerai ci-dessous. Cela m'a engagé à abandonner ce principe, de connoître la direction horisontale en mer pendant la nuit. Il faut donc dès-lors, que le corps qui doit concourir

à déterminer une certaine direction tienne au vaisseau, & y tienne avec une certaine liberté de recevoir & de suivre l'impression de la pesanteur en partie : mais tout corps qui tient au vaisseau, de quelque façon que ce soit, doit être emporté par le vaisseau ; & comme il lui reste une certaine liberté de se mouvoir, les parties du systême auront une inertie relativement à ce mouvement ; cette inertie se joint à l'action de la pesanteur, & la force résultante est tout-à-fait variable & incertaine, s'écartant de la direction verticale tantôt plus, tantôt moins.

§. 4. On voit aisément par ce que je viens de dire, que si on veut considérer les agitations du vaisseau comme tout-à-fait irrégulieres, & irrégulieres en tout sens, qui ne soient absolument assujetties à aucune loi, il faut renoncer à toute espérance de pouvoir faire en mer les observations avec une certaine exactitude, sans le secours de l'horison visible. Comment prétendroit-on faire les observations sur terre, si la pesanteur changeoit continuellement de force & de direction, sans observer aucune loi dans ses variations ? C'est cependant là le cas où l'on se trouveroit sur mer. Ces réflexions serviront de pierre de touche, pour juger de toutes les méthodes qu'une imagination trop fertile pourroit suggérer, & qui, examinées selon les vraies loix de la méchanique, pourront toûjours être démontrées fausses, avec la même facilité qu'on pourra toûjours démontrer la fausseté d'un mouvement perpétuel purement méchanique, qui souvent ne laisse pas d'avoir quelque apparence de réalité. Je dis donc qu'en ce cas, il faudroit recourir à l'Arbalête, ou au Quartier Anglois, & si la nuit étoit obscure, tâcher de rendre l'horison visible, ce qu'on pourroit faire par plusieurs moyens.

§. 5. Je crois donc avoir démontré la nécessité absolue

de chercher quelque circonstance dans les agitations d'un vaisseau, qui permette de déterminer la direction de la pesanteur, & d'en séparer l'effet d'avec celui de l'inertie des corps; & par un bonheur admirable, une telle circonstance se trouve dans les agitations du vaisseau, puisque j'ai démontré que deux ou trois balancemens de suite, qui puissent être censés égaux, suffisent pour déterminer la direction verticale. Une condition si simple, & en même tems si conforme à la nature, auroit surpassé infiniment toute mon attente, si le hasard ne m'avoit conduit auparavant à rechercher la nature des balancemens harmonieux des parties différentes d'un système, qui fait un des plus importans sujets que je connoisse dans la Méchanique, & sur-tout dans la Physique.

§. 6. Puisque c'est-là le seul principe utile que la théorie admette, & que rien n'est faisable dans la pratique, qui soit démenti par une bonne théorie, nous sommes réduits à tourner toute notre attention du côté de ce principe, pour voir de quelle utilité il peut être dans la pratique. Cet examen se réduit à deux points, qui sont la réalité du principe dans les agitations du vaisseau, & la construction d'une machine fondée sur ce principe, s'il est trouvé juste.

§. 7. Si la mer étoit unie, & qu'on eût imprimé au vaisseau quelque balancement, on conviendra avec moi, que le vaisseau ne manqueroit pas de continuer de lui-même ses balancemens pendant un tems considérable, & que ces balancemens ne diminueroient que peu à peu, & même insensiblement, à cause de la masse énorme du vaisseau. Si au contraire le vaisseau est supposé entierement en repos dans une mer agitée, il ne sera balancé que peu à peu, & il lui faudra un tems considérable pour être agité dans toute sa force. Une seule lame peut bien élever le

vaisseau, mais non pas le faire rouler ou tanguer dans toute sa force, ni lui faire changer brusquement ses roulis ou tangages, qui lui seront déja imprimés, & il n'est question ici que de ces deux mouvemens. L'action successive des lames de la mer, ne fait qu'entretenir les agitations du vaisseau, & en prévenir les diminutions, tout comme dans une horloge chaque coup de dent dans la roue de rencontre, ne produit pas tout le balancement du pendule, mais ne fait que prévenir une diminution insensible, qu'il souffriroit sans cela. Cette raison me paroît suffisante, pour dire que les balancemens d'un vaisseau sont naturellement tels que nous les supposons, & qu'il faut un grand concours de causes accidentelles, pour que les balancemens qui se suivent immédiatement, soient fort différens entre eux. J'ai vû des lames se briser contre le vaisseau, sans que ses roulis en fussent changés considérablement; j'ai vû aussi tous les branles & autres choses suspendues sous le pont, faire leurs allées & venues avec beaucoup d'harmonie, au lieu qu'elles auroient été jettées, l'une d'un côté, l'autre d'un autre, si les agitations du vaisseau étoient toûjours tout-à-fait irrégulieres. Ceux-là même qui n'auront vû que de dessus les côtes les vaisseaux balancer, conviendront de notre principe, autant confirmé par toutes sortes d'expériences, qu'il est fondé sur la raison. Cependant je demande simplement qu'on suppose arriver quelquefois, & si l'on veut par hasard, ce qui doit arriver presque toûjours, & par un méchanisme naturel : car deux ou trois balancemens de suite, pleins & égaux, qu'on reconnoît facilement, & que l'Observateur peut toûjours mettre à profit, suffisent pour notre dessein, & feront le même effet que s'il y en avoit eu mille; & ces deux ou trois balancemens pourroient être encore assez inégaux, sans que cette inégalité causât une erreur

considérable dans l'obſervation à faire. Je conclus donc qu'on peut admettre, ſans le moindre ſcrupule, le principe en queſtion, pour l'uſage que je me propoſe d'en faire.

§. 8. Après avoir ſi bien établi, tant dans ces Additions, que principalement dans ma premiere Diſſertation, la réalité du principe qui doit faire la baſe de toutes les machines, dont on peut encore eſpérer quelque ſuccès; je ne dois pas douter que l'Académie n'accorde ſon approbation aux recherches que j'ai faites dans la premiere partie de ma Diſſertation, qui contient des Théorèmes purement méchaniques, tirés d'une théorie beaucoup plus générale, que j'avois trouvée depuis quelques années. Ces Théorèmes nous mettent en état de tirer un plus grand uſage des horloges en mer, & ſur-tout, de connoître à chaque inſtant la direction verticale, de laquelle dépend uniquement notre queſtion principale. Ces Théorèmes ſont d'ailleurs d'une nature à pouvoir être facilement confirmés par des expériences. Je ne m'arrêterai donc pas à une plus ample expoſition, n'étant plus queſtion que de voir ſi nos Théorèmes peuvent être appliqués avec quelque ſuccès, au but que nous nous propoſons. Je dirai donc d'abord quelques mots, ſur l'application que j'en ai déja faite dans mes recherches antérieures, & puis je propoſerai une nouvelle maniere de mettre ces Théorèmes à profit, dans la pratique, que je crois plus ſûre & plus facile à remplir pour les Obſervateurs.

§. 9. Les moyens que j'ai donnés pour connoître la vraie direction verticale en mer, malgré l'agitation du vaiſſeau, & ſans le ſecours de l'horiſon, ſont fondés ſur la meſure des angles, que font entre eux pluſieurs pendules mobiles autour d'un même axe; & j'ai décrit la machine qu'on pourroit conſtruire pour connoître leſdits angles. (§. XLV.) C'eſt-là le fondement de ma méthode générale, ſur

laquelle je ferai quelques réflexions, en priant le Lecteur de voir dans mes Recherches les méthodes particulieres, & les réflexions que j'ai déja faites sur toutes mes méthodes.

J'ai considéré d'abord qu'un pendule conserveroit parfaitement sa situation verticale dans un vaisseau non agité, & faisant voile uniformément; il faudroit donc en ce cas préférer l'usage des pendules appliqués au demi-cercle, à celui de l'Arbalête & du Quartier Anglois. Mais comme l'agitation du vaisseau jette nécessairement les pendules de côté & d'autre, j'ai marqué tout ce qu'on pouvoit & ce qu'il falloit faire, pour diminuer ces éloignemens, lesquels, avec ces précautions, ne seront pas fort considérables. Enfin, les formules que j'ai données au §. XXXIX, servent à connoître ces éloignemens: si donc ces formules laissent quelque incertitude dans la pratique, (car elles sont tout-à-fait sûres selon la théorie) cette incertitude ne regarde pas l'angle principal, qui est la hauteur de l'astre, mais simplement l'angle de correction, & il me semble que ce seroit pousser la rigidité trop loin, que de demander dans ces angles de correction une certitude entiere, sur-tout lorsque tous les moyens connus jusqu'ici nous manquent.

J'ai donné au §. XXXIX. deux formules; la premiere est:

$$A = \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times M,$$

& la seconde est celle-ci:

$$A = \frac{(l'' - l')\,MN}{(l' - l)\,N - (l'' - l)\,M}.$$

Je n'ai donné la derniere formule, que pour résoudre la question suivant toute la rigueur de la théorie, & simplement pour éviter quelque incertitude qui pourroit rester

dans la quantité λ. Effectivement la seconde formule est préférable à la premiere, si l'on suppose nos principes sur les balancemens du vaisseau exactement vrais : mais s'ils ne le sont pas, il en rejaillira quelque incertitude sur les angles *M* & *N*, qui pourroit être de plus grande conséquence, que ne seroit l'incertitude qui pourroit rester sur la quantité λ. On pourroit donc en ce cas préférer la premiere formule, pour laquelle j'ai marqué au §. XL les précautions qu'on peut prendre : la machine en deviendra en même tems plus simple, & le calcul plus facile ; on pourroit même garder les trois pendules, en suivant toûjours le calcul de la premiere formule, pour se mettre en état de s'assûrer de la justesse de l'observation ; car si le calcul donne le même angle *A*, par les trois combinaisons qu'on peut faire sur deux pendules entre les trois, ce sera une marque infaillible, tant de la bonté de la méthode, que de la justesse de l'observation.

Quant à la machine que je propose au §. XLV, je ne crois pas que ni la construction, ni la maniere de s'en servir soient fort difficiles. Il sera sans doute facile d'imaginer un ressort, lequel venant à se débander, par l'attouchement du doigt à quelque languette, arrête tout d'un coup les pendules appliqués au demi-cercle. Il ne faudra pas non plus beaucoup d'adresse à l'Observateur, pour peu qu'il s'y soit habitué, pour toucher la languette à propos & à point nommé ; on tire des coups de fusil, qui demandent incomparablement plus d'adresse. Je ne vois donc pas pourquoi on devroit renoncer à toute espérance de tirer quelque succès de ces idées, quoiqu'assez paradoxes à la premiere apparence. L'extrème difficulté, ou si je ne me trompe, l'impossibilité entiere de donner des machines fondées sur d'autres principes, mérite que l'on ait quelque indulgence pour toutes celles que nos principes fournissent.

§. 10.

§. 10. Je viens aux nouvelles idées que j'ai conçues, depuis que j'ai eu l'honneur d'envoyer mes premieres Recherches à l'Académie, mais toûjours fondées sur les mêmes principes. Elles auront ce grand avantage, de retenir constamment le demi-cercle dans sa juste position, malgré l'agitation du vaisseau, par où on évitera tous les inconvéniens de nos méthodes précédentes, qui en rendent la pratique difficile. Mais pour mettre le Lecteur au fait, il est nécessaire de remonter à la source. On remarquera aussi que ce que je dirai d'abord ne peut être appliqué qu'aux balancemens d'un vaisseau, qui, dans sa position moyenne, se tient tout droit : mais je démontrerai ensuite, que le même raisonnement subsistera toûjours, quoique le vaisseau soit couché sur un de ses côtés.

§. 11. Soit dans la premiere Figure (qui est presque la même que la *troisieme* Figure de mes Recherches), A un point fixe; AM une verge verticale, dont l'extrémité M fasse des balancemens BMB', dans le plan BAB', suivant les loix des pendules simples; supposons au point M un petit axe perpendiculaire audit plan BAB', autour duquel balance librement une autre verge mMn, dans le même plan BAB', pendant que son axe en M balance autour du point A, je dis qu'on pourra faire ensorte, que pendant ces balancemens, l'extrémité n de la verge mMn reste toûjours dans la même verticale nA, de maniere que la verge AM ayant pris la situation AB ou AB', la verge mMn se trouve dans la situation CBp, ou $C'B'p$, & que le point p ne décrive que de petites portions insensibles np, dans la verticale nA. Voici comment je détermine la longueur Mn, requise pour cette condition.

Soit $AM = L$; la longueur d'un pendule simple isochrone, avec les balancemens du point $M = \lambda$; la distance du centre d'oscillation de la verge mn, depuis son axe

en $M = l$, c'est-à-dire, que l marque la longueur d'un pendule simple isochrone, avec les balancemens que feroit la verge mn si son axe en M étoit fixe; qu'on tire ensuite les verticales BE & $B'E'$, j'ai démontré dans ma premiere Dissertation, au §. IX, à la note (ζ), que l'angle CBE ou $C'B'E'$ sera $= \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$; on aura donc aussi $BpM = \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, d'où l'on tire cette analogie $BpM : BAM = L : \lambda - l$; & si on substitue au lieu de la raison de l'angle BpM à BAM, qui sont censés fort petits, celle de leur sinus, ou bien celle des lignes AB & pB, on aura $AB\,(L) : Bp = L : \lambda - l$, & par conséquent $Bp = \lambda - l$.

Donnant donc à la partie Bp ou Mn de la verge CBp ou mMn cette longueur $\lambda - l$, l'extrémité p ou n ne fera que des balancemens insensibles verticaux, exprimés par np, pendant que l'axe en M, par lequel la verge est suspendue, est supposé faire les balancemens exprimés par l'arc BMB'; qui sont comme infiniment plus grands que les premiers, pendant lesquels même l'extrémité n ou p ne sort jamais de la verticale prolongée AM. J'ai confirmé cette proposition par plusieurs expériences, dans lesquelles il est indifférent que le point A soit au-dessous ou au-dessus du point M; la distance AM indiquée par L, n'y entre point en compte non plus: il n'y a qu'à examiner dans ces expériences, les longueurs λ & l.

§. 12. Si au lieu d'une seule verge telle que mMn, on en met plusieurs qui tournent toutes librement autour du même axe en M, & qui aient toutes la propriété marquée dans le précédent article, l'extrémité de chacune restera toûjours, pendant les balancemens de leur axe commun, dans la même verticale prolongée AM; on pourra cependant varier d'une façon quelconque, les longueurs

telle que Mn, en variant pour chaque verge la diſtance de ſon centre d'oſcillation au point de ſuſpenſion en M. La ſeconde Figure, où j'ai mis les lettres analogues pour un des côtés, explique aſſez ma penſée. La verge qui a ſa diſtance l la plus petite, eſt repréſentée dans ſon plus grand éloignement par CBp, & celle qui a cette pareille diſtance la plus grande, eſt repréſentée par $C'''Bp'''$; mais je veux que la premiere CBp ſoit conſtruite autrement que toutes les autres, qui auront une même ſtructure entre elles.

§. 13. Je demande donc que la verge CBp ait au point p encore un axe perpendiculaire au plan de la Figure, qui ſoûtienne une barre priſmatique rectangulaire, librement mobile autour de cet axe, comme cela eſt marqué dans la troiſieme Figure, dans laquelle PQ repréſente cette barre. Il eſt clair que cette barre PQ, quand il n'y auroit que la ſeule verge CBp, demeurera verticale d'elle-même, pendant les balancemens de l'axe en M ou B autour du point A, & ceux de la verge CBp autour de l'axe en B: car cette barre PQ n'eſt emportée par l'axe en p, que par des balancemens très-petits, qui ſe font dans une direction verticale, leſquels ne ſçauroient faire changer à la barre PQ ſa direction naturelle, que je ſuppoſe verticale.

Il faut remarquer ici une circonſtance très-eſſentielle; c'eſt que dans la détermination du centre d'oſcillation de la verge CBp, le poids de la barre PQ & du demi-cercle qu'elle doit porter, eſt cenſé ici appartenir à la verge CBp, & tout concentré au point p, chaque partie de la barre ayant le même mouvement que le point p, auquel elle eſt ſoûtenue.

La barre PQ demeurant déja, par ce ſeul méchaniſme, dans ſa ſituation verticale, ce que je vais ajoûter ne ſervira que pour l'y affermir davantage, & pour prévenir par-là

le danger, que le moindre attouchement ne la détourne de sa juste position. C'est dans cette vûe que je conseille encore de faire dans la barre PQ une coulisse, ou rainure ro, d'une largeur égale, & dont les côtés en dedans soient parfaitement polis, qui recevra les extrémités des autres verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. de la seconde Figure.

§. 14. Pour rendre le mouvement des extrémités de ces autres verges dans la coulisse parfaitement libre, on pourra garnir chacune de ces extrémités p', p'', &c. d'une poulie travaillée avec grand soin, dont le diametre soit tant soit peu plus petit que la largeur de la rainure.

§. 15. Si l'on donne à toutes ces autres verges $C'Bp'$; $C''Bp''$, &c. la propriété marquée au §. 11, en faisant pour chacune la partie $Bp' = \lambda - l'$, il est clair qu'elles concourront toutes à retenir la barre PQ dans sa situation verticale, puisque leurs balancemens harmonieux ne laisseront pas de conserver une liberté entiere, s'ils sont supposés se faire dans chacune à part, avec toutes les loix que la théorie exige; & si au contraire on supposoit aux verges une disposition à s'éloigner de ces loix, elles s'en empêcheront les unes les autres, l'harmonie des balancemens se conservant dans toutes les verges, par la construction de la machine. Ce n'est pas là un des moindres avantages de la machine que je propose ici.

§. 16. Puisque la barre PQ ne sçauroit manquer d'être retenue par les verges, qui concourent toutes à cet effet, dans sa situation verticale, on n'aura qu'à affermir un demi-cercle à cette barre, tel que SRT, dont le diametre ST soit perpendiculaire à la barre, avec une alidade mobile XZ, avec laquelle on pourra prendre la hauteur d'un astre tout-à-fait à son aise, & à peu près avec la même exactitude qu'on le feroit sur terre. Voici encore quelques précautions qu'il faudra prendre.

§. 17. L'axe en *B*, qui soûtient tout le systême, étant perpendiculaire au plan de la Figure, & naturellement horisontal, doit être mobile horisontalement, ce qui est facile à faire, & l'Observateur doit être mis en état de gouverner avec une main cet axe, pour pouvoir retenir à peu près le plan de la machine dans le plan vertical de l'astre qu'il veut observer; mais il prendra garde de ne toucher en aucune autre façon ni la barre, ni les verges, afin de leur laisser une liberté entiere de se mettre dans leur juste position à chaque instant. Il est vrai que la machine gardera quelques balancemens dans le plan perpendiculaire à celui de la machine : mais ces balancemens ne sont d'aucune conséquence sensible, & je ne crois pas qu'on doive rendre la machine plus composée pour y remédier, comme on le pourroit faire si on vouloit avoir égard. L'Observateur prendra aussi bien garde, en dirigeant de l'autre main l'alidade *XZ*, de n'y toucher que de l'extrémité du doigt, & simplement par de petits coups, sans y appuyer, & cela toûjours pour ne pas déranger le systême dans ses mouvemens naturels. Peut-être sera-t-il plus convenable d'employer deux personnes, dont l'un soit attentif à retenir l'axe en *B* dans sa juste position, & l'autre à diriger simplement l'alidade.

§. 18. Si j'ai supposé jusqu'ici la ligne *AM* verticale, ce n'a été que pour rendre mon systême plus clair & plus intelligible. Je dis donc à présent, que tout mon raisonnement subsistera encore, quelque inclinée qu'on suppose la ligne *AM*. On n'a qu'à comparer ensemble la seconde & la quatrieme Figure, pour voir toute la différence qu'il y aura d'un cas à l'autre. Voici donc comment je démontre qu'on aura encore pour ce second cas $Bp = \lambda - l$, en considérant les angles *CBE* & *BAM* comme fort petits, de même que nous l'avons fait pour le cas précédent.

Qu'on tire dans la quatrieme Figure, les horifontales BG & MF avec la verticale AF, & le triangle BGM pourra être cenſé ſemblable au triangle AFM. Or, j'ai démontré au §. x. de mes premieres Recherches, que l'angle $CBE = \frac{AB}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Mais $CBE = BpG = \frac{BG}{Bp} = \frac{BG}{BM} \times \frac{BM}{Bp} = \frac{AF}{AM} \times \frac{BM}{Bp}$. Donc $\frac{AF}{AM} \times \frac{BM}{Bp} = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, ou $\frac{BM}{Bp} = \frac{L}{\lambda - l} \times BAM = \frac{L}{\lambda - l} \times \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{\lambda - l}$, & par conſéquent $\frac{1}{Bp} = \frac{1}{\lambda - l}$, ou $Bp = \lambda - l$. C. Q. F. D.

Voilà encore une propriété extrèmement favorable à notre ſyſtème, & ſans laquelle il auroit été entierement détruit, puiſque l'inclinaiſon moyenne du vaiſſeau eſt toûjours incertaine & inconſtante. La nature nous donne ici du ſecours, où tout moyen nous eût manqué. Nous voyons donc que la barre PQ (*Fig.* 3.) conſervera ſa direction verticale, lors même que l'axe en M ou B, par lequel le ſyſtème eſt ſoûtenu, balance autour d'un point pris hors de la verticale PQM; & ainſi la machine que je propoſe, ſervira également pour toutes les poſitions du vaiſſeau.

§. 19. Ce que je viens de dire ſuffit pour comprendre notre ſyſtème, & toutes les raiſons qui m'y ont conduit. Je ne m'arrêterai pas aux deſcriptions purement méchaniques; les machiniſtes y ſuppléeront d'eux-mêmes, auſſitôt qu'ils ſe feront mis au fait. Mais il nous reſte des remarques eſſentielles à faire, tirées de la théorie, touchant la conſtruction des verges, qui ſoûtiennent & dirigent la barre, à laquelle le demi-cercle eſt affermi, & touchant la façon de les préparer pour l'obſervation Aſtronomique, toutes les fois qu'on ſe propoſe de la faire.

§. 20. Je ne prétends pas que la quantité λ, qui

marque la longueur du pendule simple isochrone, avec les balancemens du vaisseau, soit toûjours tout-à-fait la même pour toutes les circonstances : mais je crois bien qu'elle peut être censée telle pour les mêmes circonstances, & pour un petit intervalle de tems. Il faudra donc accommoder la machine aux circonstances où l'on se trouvera, & cela consistera à mettre les centres d'oscillation des verges CBp, $C'Bp'$, &c. dans leur juste position, de sorte que pour chacune la quantité Bp, Bp', &c. devienne $= \lambda - l$. Cette condition demande que chaque verge soit garnie d'un poids, qu'on puisse monter & descendre tout le long de la verge, tout comme dans les pendules appliqués aux horloges; moyennant ces poids, on pourra donner telle position qu'il conviendra aux centres d'oscillation des verges, sans changer les distances Bp, Bp', Bp'', &c. que je désignerai par a, a', a'', &c. pendant que je distinguerai les distances du centre d'oscillation, depuis le point de suspension M ou B pour chaque verge, par l, l', l'', &c. Ces dénominations nous donnent $a = \lambda - l$; $a' = \lambda - l'$; $a'' = \lambda - l''$, &c. ou bien ; $l = \lambda - a$; $l' = \lambda - a'$; $l'' = \lambda - a''$, &c. & ces dernieres équations marquent les distances l, l', l'', &c. qu'on pourra obtenir pour chaque verge, moyennant le poids mobile dont elle est garnie.

§. 21. Il faut donc, pour se préparer à l'observation, commencer d'abord par connoître la quantité λ, pour les circonstances où l'on se trouve : pour cet effet, on comptera le nombre des balancemens du vaisseau pendant deux ou trois minutes ; on pourra se servir pour cet effet d'une montre de poche, dont on aura connu le nombre de battemens qu'elle fait dans une minute. Supposons que dans une minute de tems, le vaisseau ait fait autant de balancemens qu'il y a d'unités en n, & donnons 440 lignes à la

longueur d'un pendule ſimple à ſecondes, & on aura la longueur moyenne $\lambda = 440 \times \frac{3600}{nn} = \frac{1584000}{nn}$ lignes ; & ſi de cette quantité on retranche pour chaque verge la longueur a, a' ou a'', qui demeure toûjours la même, & dont il faut avoir pris exactement la meſure, on connoîtra au juſte les longueurs l, l', l'', &c. en lignes.

§. 22. Quant aux verges, il faut les régler une fois pour toutes, par des diviſions exactes, & faites avec grand ſoin; ces diviſions ſeront marquées par le nombre de lignes qui leur conviennent, & elles indiqueront de cette façon, les points où il faudra toûjours mettre les poids à chaque obſervation, après avoir trouvé la quantité λ : on ſçait que cela ſe peut faire avec toute la préciſion qu'on ſe propoſe. Si je veux, par exemple, trouver le point où il faut placer le poids mobile, afin que la diſtance l ou l' ou l'', &c. ſoit de 1532 lignes, je n'ai qu'à chercher où il faut placer le poids pour faire balancer la verge autour de ſon axe dans une heure de tems, autant de fois qu'il y a d'unités en $3600\sqrt{\frac{440}{1532}}$, c'eſt-à-dire, 1929 fois; les autres diviſions ſe peuvent faire par le calcul. Il y a encore une remarque particuliere à faire ſur cette conſtruction, par rapport à la verge CBp, qui ſoûtient ſeule la barre PQ; c'eſt que tout le poids de cette barre, y compris celui du demi-cercle, doit être cenſé faire partie de la verge CBp, & être concentré au point p, comme j'ai démontré au §. 13 de ces Additions. C'eſt pourquoi pour faire les diviſions ſur la verge CBp, on ôtera la barre, & on mettra à ſa place, à l'extrémité p, un poids parfaitement égal à celui de la barre & du demi-cercle, & ſi ce poids ſubſtitué, avoit un volume conſidérable, ce qui feroit un peu changer les balancemens que notre théorie ſuppoſe, il vaudroit mieux pour l'entiere juſteſſe des diviſions, les

chercher

chercher par le calcul, tel que la regle de trouver le centre d'oscillation enseigne, après avoir pris le centre d'oscillation de la verge *CBp* à part, & reconnu toutes les proportions qu'il y a entre les poids de la verge du corps mobile & de la barre, aussi-bien qu'entre les distances depuis l'axe en *B*, jusqu'au point où la barre & le corps mobile sont appliqués à la verge. Il ne faut rien négliger pour l'exactitude que le méchaniste peut donner à la machine, & qui ne demande que beaucoup d'attention & d'application.

§. 23. Après avoir décrit toutes les précautions qu'il faut prendre pour la construction de la machine, il ne sera pas hors de propos de remarquer encore une circonstance, qui facilitera à l'Observateur le moyen de se préparer à l'observation : elle consiste à marquer par les mêmes nombres, les divisions correspondantes sur chacune des verges ; & afin que l'Observateur sçache aussi-tôt les points où il faudra placer les poids, ces nombres seront ceux des balancemens que le vaisseau aura faits dans deux minutes de tems ; car c'est simplement ce nombre qui regle chaque division, & ce que j'ai dit dans le précédent article, ne sert qu'à la construction des verges : mais l'usage qu'il en faut faire sera fort facilité, si ces divisions sont marquées par le nombre des balancemens que le vaisseau est supposé faire dans deux minutes de tems.

§. 24. Après qu'on aura placé les poids régulateurs sur le nombre des balancemens du vaisseau, qu'on aura comptés pendant deux minutes, on pourra se former une marque, pour connoître si ces poids sont dûment placés : pour cet effet on pourra faire les bouts d'enhaut des verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. qui ne soûtiennent aucun autre poids que celui de leur propre matiere, d'acier qui plie quand il souffre un effort considérable de côté. Si l'on remarque

donc que ces bouts d'acier ne se courbent pas pendant que le vaisseau est agité, ou qu'ils ne se courbent pas beaucoup, l'observation ne pourra manquer d'être fort juste: mais si ces bouts se courboient beaucoup, on essayeroit si en baissant ou haussant un peu leurs régulateurs, ils se courberoient moins, & en ce cas il faudroit le faire. Je prévois bien cependant, qu'il pourra arriver dans les grandes tourmentes, que les verges resteront toûjours dans quelque légere contrainte, qui pourra provenir de l'effort que font les verges, pour retenir la barre dans sa situation verticale, malgré une certaine irrégularité des balancemens du vaisseau; aussi est-ce là une des raisons qui m'ont engagé à conseiller d'employer plusieurs verges, qui concourent toutes au même effet; sans ces vûes accessoires, la seule verge CBp suffiroit.

§. 25. Je finirai cette partie principale de mes Additions, par quelques remarques qui regardent le succès qu'on doit attendre de la machine proposée. Il est à remarquer que la barre PQ ne demeure pas seulement dans une situation verticale pendant les agitations du vaisseau, mais qu'elle reste encore dans la même verticale; & ainsi quand même les balancemens du vaisseau seroient assez irréguliers pour faire sortir la barre de sa ligne, elle pourra encore garder une position verticale, par un mouvement parallele, qui lui sera plus naturel que tout autre. Voici un autre avantage; c'est que toute la machine étant fondée sur l'harmonie des balancemens de ses parties, si cette harmonie étoit dérangée par quelque accident, elle seroit rétablie aussi-tôt, en vertu même de la construction, puisqu'il doit nécessairement arriver au milieu de chaque balancement, que toutes les verges & la barre se réunissent dans un même instant. Je crois aussi que le moment le plus sûr pour faire l'observation, sera celui de cette réunion;

la barre PQ ne pourra alors s'écarter ſenſiblement de la verticale, ſur tout ſi on place en même tems l'axe B, qui ſoûtient la machine, le plus près que les circonſtances le permettent du point A, qui eſt toûjours le centre de gravité du vaiſſeau, puiſqu'alors cet axe même ne ſouffre que des balancemens aſſez légers; c'eſt auſſi à quoi je conſeille d'être attentif, puiſqu'enfin il ne faut rien négliger de tout ce qui peut rendre l'obſervation plus exacte. Enfin quand même la barre PQ ne garderoit pas avec une perfection entiere ſa poſition verticale, elle feroit elle-même des balancemens réguliers & harmonieux avec ceux du vaiſſeau, de ſorte qu'après avoir dirigé l'alidade, ſans y toucher davantage, on n'auroit qu'à remarquer ſur la pinnule X, les deux points extrèmes, qui répondent au rayon viſuel, & en prendre le milieu, ce qui donneroit le petit angle de correction pour l'angle XPS, qui marque la hauteur de l'aſtre.

§. 26. Avec toutes ces précautions, je me flate qu'on pourra prendre la hauteur ſur mer en tout tems, & toûjours avec beaucoup de préciſion. S'il y a encore quelques inconvéniens dans l'uſage de la machine que j'ai décrite, ils ne pourront être que très-légers, & fort excuſables par la nature du ſujet. Pourroit-on eſpérer ici la même préciſion, la même facilité & la même ſimplicité qu'on a ſur terre? Je prévois bien cependant, qu'on ne pourra donner à ces idées leur derniere perfection, qu'après une longue ſuite d'expériences, & d'attentions continuelles à remédier, conformément à nos principes, à tous les petits défauts qu'on remarquera dans les premiers eſſais. Cette derniere perfection dépendra ſur tout de la juſte proportion qu'il faudra donner à tous égards aux parties qui compoſent la machine, & qu'on ne ſçauroit déterminer aſſez par la ſimple théorie. Cependant ce que

la théorie dicte absolument, suffit pour nous assûrer par avance d'un succès plus que médiocre, même dans les premiers essais; car enfin, nos Théorèmes & nos Principes de Méchanique pure, ne souffrent pas la moindre exception, & nos hypotheses sur les balancemens d'un vaisseau, sont fondées sur la bonne théorie hydrodynamique; elles sont conformes à toutes les expériences & observations nautiques, & d'ailleurs deux ou trois balancemens successifs, achevés & uniformes suffisent, & font le même effet que si tous les balancemens précédens l'avoient été de même. Ces balancemens achevés & uniformes sont faciles à reconnoître; ils ne peuvent manquer d'arriver quelquefois, même dans les plus grandes tempêtes, & on pourra toûjours en profiter, soit de nuit, soit de jour. Je crois aussi fermement, que pour les observations de nuit, il n'est pas possible d'employer d'autres principes; & quant aux observations de jour, l'expérience décidera si la machine que je viens de proposer, n'est pas le plus souvent, peut-être même toûjours, préférable à l'Arbalête & au Quartier Anglois.

§. 27. On pourroit cependant, s'il étoit nécessaire, contre mon opinion, pousser les corrections & l'exactitude plus loin, & même aussi loin qu'on voudroit. Voici là-dessus mes réflexions. J'ai fait voir que le point p, auquel la barre PQ est soûtenue, ne sçauroit avoir aucun mouvement horisontal, & qu'il n'est plus sujet qu'à des balancemens verticaux, qui ne font aucun effort pour faire sortir ladite barre PQ hors de sa situation verticale. Mais supposons qu'une énorme irrégularité dans les balancemens du vaisseau, puisse produire au point p des mouvemens considérables dans la direction horisontale, on pourra mettre autour de l'axe en B, une seule verge CBp, mais extrêmement pesante, & puis appliquer toute la machine

représentée dans la troisieme Figure, à l'axe en p, au lieu de la suspendre immédiatement par l'axe en B, & en ce cas, cette verge accessoire doit avoir la même propriété touchant la distance Bp, & le poids de toute la machine doit être considéré comme concentré au point p. Il est clair que par cette seconde correction, on achevera de remédier à tous les défauts: on voit aussi qu'on peut pousser ces corrections aussi loin qu'on voudra. La cinquieme Figure explique le principe de cette seconde correction; car si dans la premiere verge CBB', l'extrémité B' est encore sujette à quitter la verticale prolongée AM, l'extrémité p' de la seconde verge $C'B'p'$, mobile autour du point B' ne pourra jamais s'écarter sensiblement de cette verticale.

§. 28. Je ne me suis proposé que de décrire ce que la théorie & la méchanique exigent, sans rien prescrire aux Artistes, qui n'auront aucune peine à la construction de cette machine, selon toute l'étendue de nos vûes, aussitôt qu'ils en seront bien informés. Je ne laisserai pas de dire encore quelques mots sur la construction des verges CBp, $C'Bp'$, &c. de la troisieme Figure, non dans le dessein d'instruire les ouvriers, mais dans celui de mettre dans un plus grand jour la machine que je propose.

Comme ces verges doivent tourner librement autour d'un axe commun en B, & se croiser à chaque balancement, il faut les construire d'une façon à le pouvoir faire en toute liberté; c'est pourquoi au lieu de simples verges, on pourra se servir de plaques rectangulaires, presque entierement percées, de sorte qu'elles entrent les unes dans les autres. La sixieme Figure représente deux de ces plaques; $CCpp p$ marque le bord de la premiere, & $C'C'p'p'p'$ le bord de la seconde; BB marque l'axe commun, autour duquel toutes ces plaques peuvent tourner

librement, & se croiser, sans s'empêcher les unes les autres; PQ marque la barre, qui doit soûtenir le demi-cercle; $r\,o$ marque la longueur de la coulisse, qui reçoit le bord $p'p'$ garni d'une poulie dans son milieu, pendant que la barre est soûtenue par le bord pp, autour duquel elle tourne librement. La troisieme Figure marquera ensuite en profil, avec des lettres analogues, ce que représente cette sixieme Figure. Le centre de gravité de chaque plaque doit être beaucoup au-dessous de l'axe BB.

§. 29. Je ne dirai plus qu'un mot sur la maniere de suspendre la machine: je crois que la meilleure maniere sera de se servir d'une genouillere : mais le globe doit être creusé en dedans, & laisser deux ouvertures en haut & en bas, pour donner la liberté aux verges ou plaques, de faire leurs balancemens autour de l'axe BB. Je représente un tel globe par la septieme Figure, dans laquelle BB marque l'axe, qui soûtient la machine, & les ouvertures entre les bords MM & NN, laisseront à ces verges ou plaques, toute la liberté de faire leurs balancemens.

§. 30. Je n'ajoûterai plus qu'une seule réflexion sur cette matiere, mais essentielle, utile, & qui fera voir combien j'ai été scrupuleux dans cet examen & ces recherches. Ressouvenons-nous donc pour la troisieme Figure, que $Bp = \lambda - l$; $Bp' = \lambda - l'$, &c. que λ exprime la longueur d'un pendule simple isochrone avec les balancemens du vaisseau, pendant que les lettres l, l', &c. marquent les distances des centres d'oscillations des verges ou plaques CBp, $C'Bp'$, &c. depuis l'axe en B. Ces quantités l, l', &c. sont arbitraires, & on peut les rendre aussi grandes qu'on veut, sans faire les bouts BC, BC', &c. plus longs, en approchant davantage leur centre de gravité du point B : mais il y a un inconvénient de part & d'autre, à les faire trop grandes & trop petites. Si elles

ſont grandes, les verges ou plaques prendront trop d'eſſor dans leurs balancemens, & ſi elles ſont petites, les parties *Bp*, *Bp'*, &c. deviendront trop grandes, & incommodes pour la conſtruction & pour l'uſage de la machine : car la longueur λ peut aller peut-être au-delà de 40 ou même de 50 piés. J'ai donc examiné ſoigneuſement, ſi on ne pourroit pas remédier à ce ſecond inconvénient, & j'ai trouvé qu'on peut le faire de la maniere qui ſuit.

Il eſt clair qu'en diminuant les parties *Bp*, *Bp'*, &c. dans une même proportion, la ligne qui ſera tirée par les extrémités, ſera parallele à *PQ*, & par conſéquent encore verticale: mais alors le point *p* ne ſera plus immobile par rapport à l'horiſon; il ſera des balancemens, & l'axe en *p*, qui ſoûtient la barre *PQ*, emportera cette barre par des balancemens horiſontaux; ces balancemens pourront faire ſortir la barre hors de ſa poſition verticale : on peut cependant encore prévenir ce dérangement, qui gâteroit tout, de deux façons. La *premiere* eſt de charger beaucoup les verges ou plaques *C'Bp*, *CBp'*, &c. & fort peu la barre *PQ*, qui en ce cas, ne fera aucun effort ſenſible ſur les verges ou plaques, & par conſéquent gardera conſtamment ſa direction verticale. La *ſeconde* conſiſte à placer l'axe *p* au centre de gravité de la barre *PQ*, y compris le poids du demi-cercle. Par ce ſecond moyen, la barre *PQ* ne fait plus aucun effort pour quitter la ſituation verticale, pendant qu'elle eſt emportée par le point *p*, par des balancemens horiſontaux, & elle eſt cependant retenue dans ſa ſituation verticale, par les bouts des autres verges ou plaques. M. Bouguer avoit déja remarqué le grand avantage qu'il y auroit, à ſatisfaire en même tems à ces deux points, dans ſa Piece qui a remporté le Prix de 1729, & qui l'a ſi bien mérité : mais ce grand Géometre, qui poſſede également toutes les connoiſſances de Phyſique, de

Méchanique & de Navigation, si nécessaires pour ces sortes de questions, ne s'est fait aucune peine de marquer lui-même l'imperfection de la méthode qu'il décrit, pour obtenir en quelque façon cet avantage. Je cite avec plaisir cette belle Piece, & j'y renvoie mon Lecteur, pour un plus grand nombre d'articles qui nous resteroient à considérer, & qu'on y trouvera tous traités avec toute l'exactitude & la perspicacité possible. Ses principes sont d'ailleurs conformes aux miens, ou du moins compatibles : il m'est cependant revenu depuis peu, qu'on a attaqué une proposition qui nous est commune, sçavoir : *Qu'un vaisseau fait ses balancemens, tant en roulant qu'en tanguant, autour de son centre de gravité*, & qu'on a substitué à ce centre, un autre que j'ai été le premier à considérer & à déterminer, pour en déduire les loix des percussions excentriques, & que j'ai appellé le centre de rotation spontanée : j'ai démontré que ce centre est toûjours le centre d'oscillation, en considérant le point d'impulsion comme le point de suspension. Il faut distinguer dans cette controverse, les balancemens qui se forment, d'avec ceux qui sont tout formés, & qui ne font que se continuer. Dans les premiers, il faut prendre le centre de rotation spontanée, en prenant pour point d'impulsion, le centre de gravité de toutes les impulsions : mais dans les balancemens formés, il faut absolument prendre le centre de gravité pour le point de rotation, comme j'ai démontré dans une Dissertation que j'ai faite sur les balancemens des corps qui nagent sur les eaux, & comme M. Euler, Auteur de ce Problème, a démontré aussi. Il y a dans cette Dissertation, plusieurs nouveaux Théorèmes, qui éclaircissent la nature des balancemens d'un vaisseau, & qui m'ont servi de base pour les présentes Recherches : mais comme elle n'a pas encore été imprimée, quoique

je l'aie faite depuis très-long-tems, je ne sçaurois m'y rapporter pour donner plus de poids à tout ce que j'ai dit, soit dans ces Additions, soit dans mes Recherches antérieures; & je deviendrois trop prolixe, si je voulois répéter ici tout ce que j'ai dit ailleurs sur ces matieres : je me contenterai donc d'avoir dit le plus essentiel. Au reste, les vents ne peuvent déranger sensiblement la machine que je propose pendant l'observation, pour plusieurs raisons que je ne m'arrêterai pas à exposer ici : d'ailleurs on n'a qu'à vouloir remédier à ces inconvéniens pour en venir à bout. Quant aux secousses des lames qui se brisent contre le vaisseau, j'avoue qu'elles peuvent altérer l'observation, mais je ne crois pas qu'elles le puissent faire sensiblement; & comme ces brisans ne viennent que par intervalle, il n'y a qu'à bien choisir le moment de l'observation, pour s'en mettre à l'abri.

§. 31. Voilà donc ce que j'avois à dire sur le point principal de notre sujet, que l'Académie a témoigné dans la seconde annonce avoir le plus à cœur, & auquel j'ai fait moi-même le plus d'attention dans ma premiere Piece : mes premieres Recherches m'ont conduit aux vrais principes, que j'ai toûjours vû clairement être les seuls à suivre. Si j'ai eu le bonheur, dans ces Additions, de faire une application plus heureuse de mes principes, j'en suis uniquement redevable à la pénétration de mes Juges, qui prévoyoient sans doute, qu'on en pouvoit tirer un plus parfait usage.

§. 32. Je n'ai que très-peu d'additions à faire sur les autres points que j'ai traités dans ma premiere Piece. J'ai été fort long, peut-être même prolixe, sur tout ce qui peut concerner la mesure du tems absolu sur mer. Il est sûr qu'une plus grande perfection de cette matiere, dépend beaucoup plus d'une bonne théorie, que d'une connoissance

parfaite de tout ce qui regarde la pratique. Je crois avoir indiqué les vrais principes qui peuvent conduire à une plus exacte mesure du tems, tant sur mer que sur terre. Ils sont nouveaux pour la plûpart : j'avoue qu'il y en a d'assez paradoxes ; mais ceux-ci même ne laisseront pas, à ce que j'espere, de soûtenir l'examen des plus grands connoisseurs. Je ne demande à ceux-ci, que la grace d'examiner mes principes sans prévention : si après cela ils ne sont pas de mon sentiment, je me soûmettrai très-volontiers à leur décision & à leur autorité, & les prierai de regarder comme non dit, ce qu'ils trouveront être dit contre les regles bien avérées de l'art, dont j'ignore entierement la pratique ; & je mérite d'autant plus cette indulgence, que j'aurois pû me dispenser d'examiner cette matiere aussi scrupuleusement que je l'ai fait, sans me faire tort par rapport à notre sujet principal. Il y a cependant dans ces matieres, bien des choses très-fondées, qui paroissent démenties par l'expérience ; tel est, par exemple, mon Théorème du §. XVI. J'ai moi-même une pendule assez bien travaillée, qui ne se remonte que de quinze en quinze jours, mais qui n'a point de fusée pour régler le ressort moteur, de sorte que le pendule décrit des arcs beaucoup plus grands au commencement que vers la fin ; cependant cette pendule avance un peu au commencement, & retarde sur la fin, ce qui montre en même tems l'inutilité des petites lames cycloïdiques, qui devroient régler le mouvement du pendule, & qui n'ont fait qu'augmenter l'inégalité de la marche dans ma pendule : mais ces sortes de pendules ne doivent pas être mises au nombre des bonnes pendules, qui doivent être telles, que les balancemens de leur pendule ne different pas sensiblement entre eux, soit qu'on le détache de l'horloge, soit qu'on l'y applique. Aussi notre Théorème quadre-t-il parfaitement

avec les expériences faites sur l'excellente pendule de M. Graham. J'ai cependant examiné d'où pouvoit provenir l'effet contraire dans d'autres pendules, moins bonnes que celles d'un M. Graham ou d'un M. le Roi; c'est sans doute, parce que le pendule n'y étant pas si bien suspendu, & ne faisant pas ses balancemens avec autant de liberté, demande une plus grande action, pour être animé & entretenu dans ses balancemens; & si cette action n'exerce sa force sur l'échappement, qu'au moment que le pendule se trouve vers le milieu, sans y agir en aucune façon, pendant tout le tems que le pendule se trouve vers les extrémités des arcs qu'il décrit, comme cela arrive dans les grands balancemens du pendule, on peut démontrer alors, que les balancemens en sont d'autant plus accélérés, qu'ils sont plus grands. Cette raison ne subsiste pas dans les bonnes pendules, parce que la force qui entretient leur marche est si petite, qu'elle ne sçauroit déranger sensiblement le mouvement du pendule, de quelque façon qu'elle agisse sur l'échappement. C'est-là la raison pourquoi il est si nécessaire de bien suspendre le pendule, ce que personne n'a mieux exécuté, à mon avis, que Messieurs le Roi & Graham. Concluons aussi de-là, qu'il ne faut pas rejetter facilement ce que la méchanique dicte.

§. 33. J'ai donné au §. XVIII de mes premieres Recherches, les précautions les plus essentielles qu'on peut prendre sur mer, pour se servir utilement des pendules. M. Massy en a donné quelques autres, qui paroissent bien fondées, dans sa Piece qui a remporté le prix de 1720. Si les balancemens d'un vaisseau sont trouvés être toûjours à peu près isochrones entre eux, on pourra encore tirer quelque utilité du principe dont nous nous sommes servi pour faire les observations Astronomiques sur mer, pour bien suspendre les pendules. Car comme le point p

(*Fig.* 1.) ne fait que des balancemens verticaux, on pourra ménager un genou à l'extrémité de la verge $m M n$, ou $C B p$, pour en suspendre la pendule, laquelle ne fera de cette façon, que de légers balancemens verticaux, pendant lesquels le mouvement du pendule sera alternativement un peu accéléré & retardé, mais d'une maniere insensible, & telle que ces inégalités se détruiront parfaitement.

§. 34. A ces remarques je n'en ajoûterai qu'une seule, qui concerne la maniere de construire les pendules, telle que le changement du froid & du chaud, n'en puisse point altérer le mouvement, n'ayant fait qu'indiquer dans ma premiere dissertation, cette construction au §. XVII, à la note (*e*). Il y a dans les Mémoires de l'Académie, différentes descriptions fondées sur le même principe que j'ai indiqué : si j'ajoûte la mienne, ce n'est que parce qu'elle pourra peut-être paroître plus simple. Puisqu'il y a des métaux de différente extensibilité, comme, par exemple, le cuivre & le fer, on n'aura qu'à se servir d'une simple verge $A C$ (*Fig.* 8.), mais chargée d'une lentille à chaque extrémité A & C. Si cette verge est supposée balancer autour du point B, la partie $B C$ d'en bas sera faite de la matiere qui souffre plus d'extension, & la partie d'en haut $B A$, de celle qui en souffre moins ; & voilà toute la construction, qui a en même tems cet avantage, qu'un tel pendule $A C$ sera beaucoup plus court, qu'un pendule simple isochrone. Voyons à présent quelle proportion il faudra donner, soit au poids des lentilles, soit aux longueurs $B C$ & $B A$. Je négligerai le poids de la verge, par rapport à celui des lentilles, simplement pour éviter la prolixité du calcul.

Soit donc l'extensibilité de la matiere en $B C$ à celle en $B A$, pour des longueurs égales, comme m à n ; $B C = a$;

$BA=b$; le poids en $C=A$; le poids en $A=B$; le centre d'oscillation en D: supposons ensuite que la partie BC s'étende en Bc, & la partie BA en Ba: la nature du Problème demande qu'après ce changement, le centre d'oscillation se trouve encore en D. Soit $Cc=\alpha$, on aura $Aa=\frac{n}{m}\times\frac{b}{a}\times\alpha$, & par conséquent $BD=\frac{aaA+bbB}{aA-bB}$

$$=\frac{(a+\alpha)^2A+(b+\frac{n}{m}\times\frac{b}{a}\times\alpha)^2B}{(a+\alpha)A-(b+\frac{n}{m}\times\frac{b}{a}\times\alpha)B}.$$

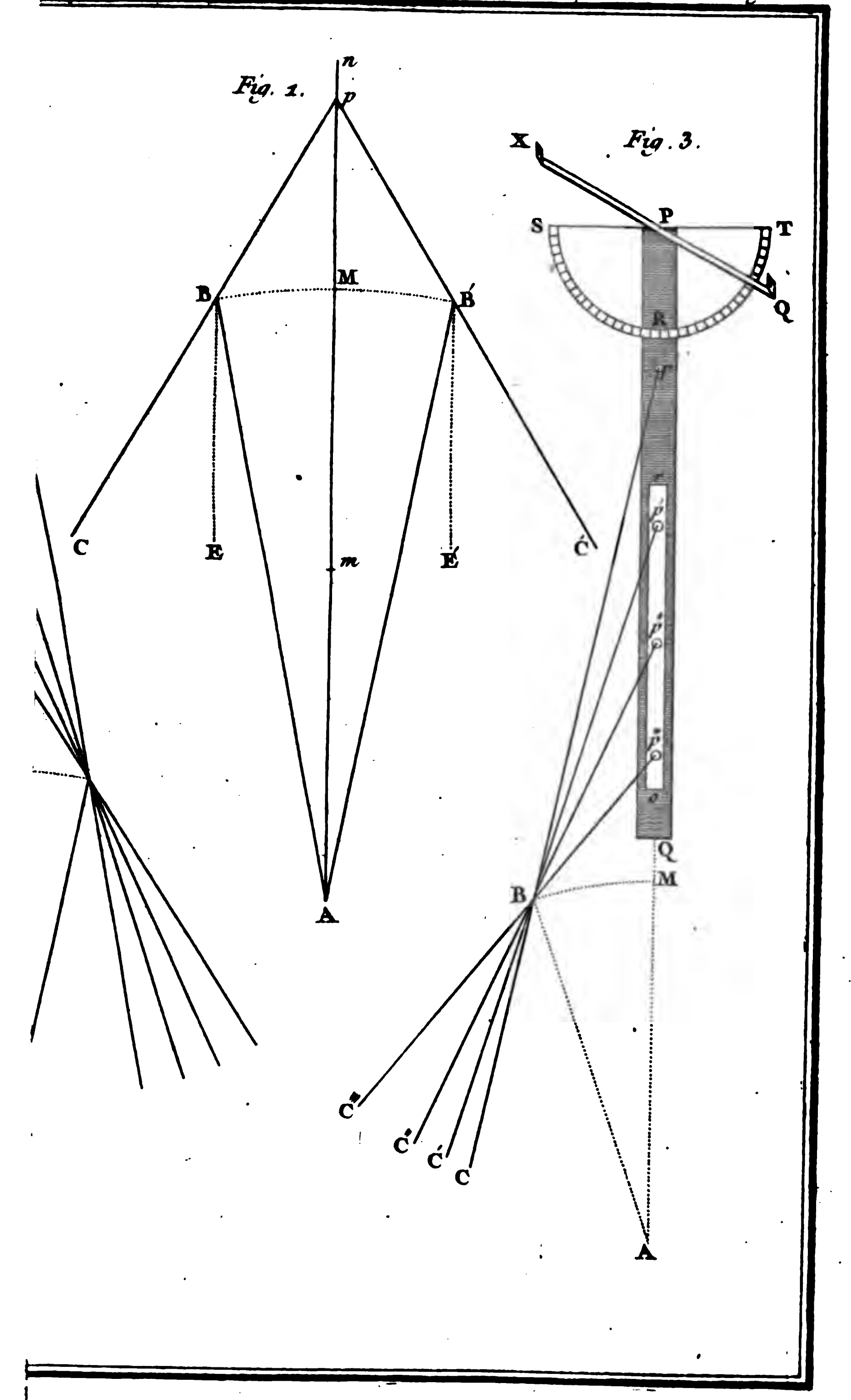
Pour abréger le calcul de cette équation, on n'a qu'à traiter les petites variations insensibles d'infiniment petites; différentier la formule $\frac{aaA+bbB}{aA-bB}$, en considérant les quantités a & b comme variables, A & B comme constante, poser la différentielle $=0$, & enfin, faire $db=\frac{n}{m}\times\frac{b}{a}\times da$. De cette maniere, on trouvera l'équation qui suit:

$$ma^3AA-2maabAB-mabbAB=nb^3BB-2nabbAB-naabAB,$$ à laquelle on pourra satisfaire d'une infinité de manieres.

Si l'on supposoit $m=2n$; $BC=BA$, on trouveroit $\frac{A}{B}=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$, qui marque que le poids de la lentille d'en bas, devroit être presque le double de celui de la lentille d'en haut.

Dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1741, *pag.* 366, il est dit que la proportion de m à n a été observée pour le cuivre & le fer, comme 17 à 10, & faisant pour cette proportion encore $a=b$, on trouvera $\frac{A}{B}=\frac{545}{340}$, ou environ $=\frac{8}{5}$, & toute la longueur du pendule AC sera de 203 lignes, pour battre les secondes.

§. 35. Je n'ai rien à ajoûter aux méthodes Astronomiques, que j'ai données dans mes Recherches, ayant


Fig. 1.
n
p
M
B
B'
C
E
m
E'
C'
A
Fig. 3.
X
P
S
T
Q
R
B
M
A
C'''
C''
C'
C

MEDITATIONES

IN QUÆSTIONEM

AB ILLUSTRISSIMA ACADEMIA REGIA PARIS. SCIENTIARUM,

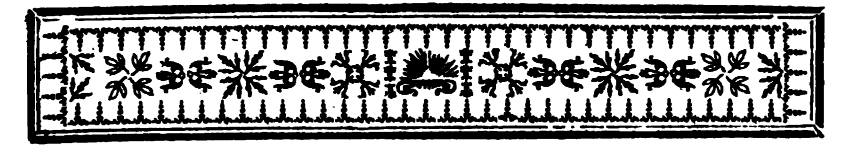
Pro anno 1747. cum Præmio duplicato

PROPOSITAM.

Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quam noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimè & certissimè determinari queat?

Arbor non uno sternitur ictu.

MEDITATIONES



MEDITATIONES IN QUÆSTIONEM AB ILLUSTRISSIMA ACADEMIA REGIA PARIS. SCIENTIARUM,

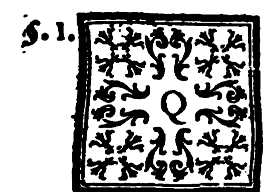
Pro anno 1747. cum Præmio duplicato PROPOSITAM.

Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quàm noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimè & certissimè determinari queat?

Arbor non uno sternitur ictu.

I.

EXPLICATIO INSTITUTI.

§. 1. UAMVIS accurata hujus quæstionis solutio non parùm ad inventionem longitudinis conferre videatur, quoniam ex discrimine temporum in diversis locis simul observatorum differentia inter eorum longitudines aptissimè concluditur; tamen hæc quæstio, etiam remoto hoc summo perfectionis gradu, in

omni navigatione non solùm est utilissima, sed etiam maximè necessaria, nihil enim in navi suscipitur, quod quidem ad ejus cursum pertineat, quin plurimùm intersit verum temporis momentum nosse, quo id factum sit. Verùm superfluum foret hîc dignitatem & utilitatem istius quæstionis collaudare velle, cùm ipsa Academia Regia, repetitâ ejus propositione, simul summum ejus usum declaret.

§. 2. Cùm tempus à meridie cujusque diei, vel à media nocte mensurari ac numerari soleat, patet in navi quando temporis momentum quæritur, numerum horarum ac minutorum desiderari, quæ vel à meridie vel à media nocte ejus loci, ubi navis tunc versatur, sint elapsa. Cùm enim Academia tempus non per horologia definire jubeat, sed per solas observationes, perspicuum estnon requiri mensuram durationis à quopiam temporis momento cognito; sed verum tempus Astronomicum quod observationes pro eo loco & tempore exhibeant; vel quod horologium solare, siquidem in usum adhiberi posset, esset indicaturum.

§. 3. Si quidem navis vel quiesceret, vel sub eodem meridiano progrederetur, non aliud intercederet discrimen inter mensuram temporis reverâ præterlapsi & temporis Astronomici, nisi quòd ex æquatione temporis nasceretur. Sin autem navis continuò secundùm longitudinem promoveatur, manifestum est, hos duos temporis mensurandi modos, inter se plurimùm discrepare posse. Sin enim fieri posset, ut navis 24 horarum totum terræ ambitum conficeret, solemque constanter in meridiano constitutum aspiceret; Astronomicè tempus mensurando perpetuus deprehenderetur meridies, quotcumque etiam horæ præterlabantur.

§. 4. Triplicem igitur in navigatione temporis mensuram constitui oportet, quarum prima in æquabili temporis defluxu consistit, secundùm quam, verbi gratiâ, horæ

quæ à momento, quo navis è portu est egressa ad quodvis momentum datum reverâ sint elapsæ, numerantur. Secundus tempus mensurandi modus ad meridiem ejus diei, quo hora petitur, spectat; eoque quæritur quot horæ ab eo momento, quo meridies proximè præcedens fuit observatus, effluxerint: etiamsi interea navis situm secundùm longitudinem mutaverit. Tertius autem tempus metiendi modus, dinumerat horas, quæ ab eo momento, in quod meridies sub eo meridiano, ubi navis jam versatur, incidit, sunt præterlapsæ.

§. 5. Trium horum tempus describendi modorum, primus quamquam solus, veram temporis notionem præbet, hic tamen non attenditur, quoniam exquisitissima horologia requirit, neque per solas Observationes cœlestes institui potest, si quidem observationes eclipsium excipiamus. Interim tamen vera temporis duratio ex tempore per secundum vel tertium modum definito concludi potest. Si intervallum constet, quo navis secundùm longitudinem interea processerit. Tempus enim quod differentiæ longitudinum respondet, tempori observato vel additum vel demtum, dabit verum temporis intervallum.

§. 6. Hîc igitur mihi tantùm ad secundum ac tertium temporis assignandi modum erit respiciendum: qui quidem duo modi plerumque parùm à se invicem discrepabunt, nisi forte navis propè alterutrum polum versetur, ubi brevi temporis spatio satis magna longitudinis mutatio fieri potest. Præter hunc casum bini isti modi, etsi sunt diversi, tamen non difficulter alter ad alterum reduci, sicque instar unius considerari poterunt. Æstimatio enim itineris à nave confecti, jam eò usque perfecta videtur, ut quantum navis aliquot saltem horarum spatio vel longitudinem vel latitudinem immutaverit sine perceptibili errore assignari queat.

§. 7. Observationes autem per se tempus tertio tantùm modo ostendunt, in quovis enim loco, ubicumque navis constiterit: aspectus cœli perpetuò eam horam designat, quæ à meridie ejusdem loci numeratur. Quando ergo navis ab eo tempore quo verus meridies fuit observatus, ad aliam longitudinem pervenerit, tum tempus differentiæ longitudinum debitum tempori tertio modo assignata addi vel demi debet, ut obtineatur mensura temporis secundo modo descripti. Facilè autem perspicitur, etiamsi in æstimatione differentiæ longitudinum haud levis error fuerit commissus, tamen hinc temporis determinationem non sensibiliter perturbari.

§. 8. Quæstione ergo ad determinationem temporis tertio modo sumti perductâ, definiendum est, cujusmodi observationibus, ad hoc præstandum, uti conveniat. Atque hic quidem statim pleraque observationum genera, quæ in continenti institui solent, hinc excludi debent. In mari enim neque transitus astri per meridianum, neque per datum verticalem observari potest, neque eas observationes instituere licet quæ exactissimum horologium requirunt. Relinquuntur ergo potissimùm solæ observationes altitudinum, quibus proinde in hoc negotio tantùm utar.

§. 9. Hîc igitur assumo ejusmodi jam inventa esse instrumenta, quibus tam solis altitudo interdiu, quàm stellarum altitudines noctu satis accuratè observari queant. Cùm enim hæc ipsa quæstio jam sit ab illustr. Academia proposita, atque hac occasione plura eximia instrumenta altitudinibus observandis apta sint excogitata, temerarium videri possit hoc negotium denuò suscipere. Interim tamen ne ullam officii partem deseruisse videar, quædam instrumenta hîc describam, quæ forte ad præsens institutum optato successu haud carebunt.

§. 10. Quoniam denique non eo solùm momento, quo

observatio instituitur, temporis assignatio desideratur, sed præcipuè ut tempora tam antecedentia quàm consequentia, modò intervallum non sit nimis magnum, hoc modo emendentur; necesse est, ut hujusmodi brevia temporis spatia satis exactè mensurari queant; quod vel clepsydrarum vel horologiorum portatilium vel aliorum nuper demùm inventorum instrumentorum beneficio, satis exactè fieri posse hîc assumo, neque in hoc argumento ampliùs evolvendo elaborabo.

§. 11. Navem igitur jam ejusmodi instrumentis instructam esse pono, quibus saltem non nimis magna temporis intervalla accuratè secundùm horas & minuta demetiri liceat: tum verò pariter pono, ex cursu navis pariter pro exiguis temporis intervallis, variationem tam longitudinis quàm latitudinis satis exactè assignari posse; etiamsi hoc pro majoribus temporis intervallis sine enormi errore fieri non posse concedam, similiter scilicet modo, quo in terra variatio longitudinis ac latitudinis in parvis distantiis multò accuratiùs ex itineris æstimatione concludi potest, quàm ex observationibus astronomicis, cùm tamen sine his in majoribus distantiis nihil certi cognosci queat.

§. 12. His igitur circumstantiis perpensis, primùm monstrabo, quemadmodùm quovis tempore cujusque sideris altitudo idoneorum instrumentorum ope observari debeat: quod argumentum cùm jam sit uberrimè ab aliis pertractatum, brevitati maximè studebo, atque imprimis tantùm descriptioni quorundam novorum instrumentorum, quæ forte in mari utilitate non carebunt, operam dabo. Deinde plures modos describam ex observatione altitudinum veram diei noctisve horam colligendi; quod negotium cùm pariter ab aliis ferè exhaustum videatur, quæstioni illustrissimæ Academiæ me pleniùs satisfacturum confido, si selectum ejusmodi observationum, quibus

quàm minimo errore ſcopus obtineatur, indicavero, ſimulque quando aliquot obſervationibus ſucceſſivè inſtituendis utar, oſtendero, quomodò variationis, quam navis interea tam in longitudine quàm in latitudine ſubiit, ratio in calculo ſit habenda. Cùm enim hæc mutabilitas propria ſit obſervatorum in mari fluctuantium illuſtr. Academiam ad hanc potiſſimùm circumſtantiam reſpexiſſe, mihi quidem videtur.

I I.

De Obſervatione Altitudinum.

§. 13. CUM illuſtriſſima Academia expreſſis verbis trium temporum diei, crepuſculi, ac noctis mentionem faciat, ab obſervationibus interdiu inſtituendis initium faciam: quæ ab obſervationibus nocturnis hoc præcipuè diſcrepant, quod in illis horizon ſit conſpicuus, in his verò non item, ex quo fonte quoque diſcrimen inter obſervationes, durante crepuſculo & noctu factas me rectè petere arbitror, cùm in crepuſculo conſpectus horizontis, etiam nunc in obſervationibus adhiberi queat: præterquam quòd pauciſſima aſtra in crepuſculis appareant.

§. 14. Die autem præter ſolem nullum aliud ſidus ſe oculis noſtris offert, ex cujus obſervatione horam diei definire queamus, & hanc ob rem omnes obſervationes diurnas ad ſolum ſolem reſtringam, qui nobis etiam certiſſimam ac facillimam viam temporis dignoſcendi ſuggerit. Etiamſi enim, quando Luna interdiu ſuper horizonte cernitur, tamen ob curſum ejus nondum ſatis exactè cognitum, tum verò ob ejus parallaxin maximè incertam, ejus

observationes ad tempus cognoscendum adhibere nolim.

§. 15. Solis autem altitudines commodissimè Quadrante Anglico observari videntur, tum quòd nautæ huic instrumento jam satis sint assueti, tum quia non opus est, ut collimatio versùs ipsum solem fiat, sed ad ejus imaginem per foraminulum projectam respicitur, cum qua observatione directio instrumenti horizontem versùs non difficulter conjungitur. Neque tamen refragabor, si aliud instrumentum, vel eorum, quæ jam sunt proposita, vel etiam eorum quæ ipse describam, ad solis altitudines observandas magis aptum videatur, quin id in locum Quadrantis Anglici substituatur.

§. 16. Si tali instrumento altitudo centri solis intra unum minutum primum certa haberi posset eam non solùm per refractiones, sed etiam per parallaxin corrigi necesse foret, sed quia in mari hujusmodi accuratio vix sperari potest, præclarumque nobiscum agitur, si in altitudine solis non ultra 5 minuta erremus, parallaxin tutò negligere & refractiones quoque, nisi sol propè horizontem versetur, prætermittere licebit: scilicet, quamdiu refractio infra unum duove minuta prima subsistit, sufficiet nimirùm in tabulis refractionum minuta secunda penitùs omitti, ne calculus deinceps instituendus præter necessitatem molestior reddatur, quod in observationibus stellarum æquè notatum velim.

§. 17. Solisque ortus & occasus quoties licuerit, diligenter observetur; sio enim adhibitâ refractionum tabulâ, multò accuratiùs altitudo centri solis vel supra vel infra horizontem assignari poterit. Quin etiam hinc non difficulter momentum colligetur, quo altitudo centri solis reverâ fuerit nulla. Hæ verò observationes non solum sine ullis ferè instrumentis expediri possunt, sed etiam adhiberi solent ad declinationem magnetis observandam, aliosque

uſus nauticos; quamobrem eas eo minùs negligi conveniet.

§. 18. Durante crepuſculo Planetæ, potiſſimùm Venus & Jupiter, cum maximè lucidis ſtellis fixis viſui ſe offerunt. Quamquam autem hoc tempore horizontem adhuc conſpicere licet, tamen vereor ne uſus Quadrantis Anglici nimis evadat moleſtus & incertus. Cùm enim hoc caſu dioptris uti, eaque versùs ſtellam dirigere oporteat eodem momento, quo versùs horizontem collimatur; neque unus obſervator, niſi ſit exercitatiſſimus, ſtellaque propè horizontem hæreat, huic duplici collimationi par videtur, neque duo ſe mutuò adjuvare poterunt.

§. 19. Quoniam igitur ad obſervationes nocturnas alia inſtrumenta requiruntur, quæ ſine reſpectu ad horizontem habito, altitudines ſiderum indicent; iiſdem his inſtrumentis quoque in crepuſculo uti præſtabit, horizontiſque intuitum, ſolis obſervationibus ſolaribus reſervari, niſi forte alia inſtrumenta ad ſolem magis videantur accommodata. Remotâ itaque horizontis contemplatione, veniam peto, ut obſervationes crepuſculares & nocturnas in eandem claſſem mihi referre liceat.

§. 20. Pervenio itaque ad obſervationes nocturnas, quæ non ſolùm ob horizontis defectum alium obſervandi modum poſtulant, ſed etiamſi horizontem diſcernere liceret, tamen ſumma difficultas duplicem collimationem ſimul inſtituendi hunc modum inutilem redderet, cùm autem pendulorum uſus in mari penitùs ceſſet, æquilibrium fluidorum, ſi quidem ſatis ſit promtum, certiſſimè verum horizontis ſitum indicare videtur, ad quem deinceps ſiderum loca referuntur. At verò inſuper neceſſe eſt ut hæc relatio ſecundùm plana verticalia fiat, quamobrem quocumque inſtrumento utamur, id proximè in plano verticali ſuſtineri neceſſe eſt.

§. 21.

§. 21. Quocumque autem instrumento ad observandam stellæ cujusdam altitudinem utamur, primò directio, in qua stella existit, indagari debet, quæ vel dioptris vel Tubo Astronomico explorari solet. Etsi autem lentes crystallinæ objecta distinctiùs representant, tamen earum usus super mari ferè nullus est, quia ob motum continuum, stellam quam forte per tubum conspeximus, confestim amittimus, neque eam facilè recuperare valemus. Quin etiam in observationibus marinis stellas insigniores adhiberi convenit, quarum loca in cœlo jam exactissimè sint determinata, eas autem nudis oculis satis distinctè cernere licet, ut ob hanc causam tubis facilè carere queamus.

§. 22. Ad collimandum ergo instrumenta binis dioptris nudis instructa, reliquis quæ tubis sunt munita, longè antecedunt, ac altera quidem dioptra exiguo foraminulo pertusa sit, per quod stella aspiciatur. Altera verò dioptra satis amplam habeat aperturam, quo stella non facilè ex illa dispareat, statimque in eam reduci queat. Duo autem fila tenuissima in hac apertura firmata sua intersectione ejus centrum designent, in qua si stella appareat, collimatio ritè sit instituta.

§. 23. Eo ergo momento, quo stella in decussatione filorum istorum conspicitur, inclinatio istius lineæ, quæ ab oculo ad stellam dirigitur ad rectam verticalem investigari debet; quod ope quadrantis, cujus limbus accuratè in gradus & minuta sit divisus, commodissimè præstatur. Si enim planum hujus quadrantis situm verticalem teneat, in eoque linea verticalis vel pendulo vel alio quovismodo indicetur angulus, quem linea directionis cum hac linea verticali efficit, distantiam stellæ à zenith metietur, si quidem recta dioptras jungens radio quadrantis, qui per divisionis initium ducitur, fuerit parallela.

§. 24. Cùm enim ad hanc observationem duæ res

requirantur, positio, scilicet, quadrantis in situ verticali, & in eo directio gravitatis naturalis, seu positio rectæ ad horizontem perpendicularis, quemadmodùm utraque obtineri queat, seorsim perpendam. Primò igitur assumam totum negotium in situ quadrantis verticali esse positum; lineamque verticalem nihil habere difficultatis. Quadrans autem, si liberè suspendatur, centrumque gravitatis in ipso suo plano situm habeat, sponte se ad situm verticalem componet, & oscillationes, quæ ipsi à motu navis inducuntur, moderatione ejus à quo tenetur, non difficulter, si non penitùs coercentur, tamen ad summam exiguitatem redigentur.

§. 25. Tametsi autem in hoc error quidam levis committitur, planumque quadrantis verticale putatur, cùm tamen aliquantisper declinet, error tamen qui inde in observationem altitudinis redundat, omninò erit imperceptibilis, neque respectu aliorum errorum, qui evitari nequeunt, in computum duci meretur. Interim tamen & hic error ex iis, quæ mox sum traditurus facilè tolletur, cùm, pluribus observationibus instituendis, ea sit verissima, quæ maximam stellæ distantiam à zenith ostendat. Demonstrabo enim, quò magis planum quadrantis à situ verticali declinet, eò minorem distantiam stellæ à zenith deprehendi debere.

§. 26. Ut igitur definiam, quantùm observatio altitudinis à declinatione plani quadrantis turbetur cujus perturbationis cognitio ad ejus emendationem maximi est
Fig. 1. momenti; considerabo primùm quadrantem ACB, in situ verticali, sitque AC recta ab oculo ad stellam directa, in quadrante autem sit CP, verticalis, erit angulus ACP, mensura vera distantiæ stellæ à zenith; ponamus hunc angulum $ACP = \varphi$, ut eum cum simili angulo, quem situs quadrantis inclinatus indicare reperietur, comparare queamus.

§. 27. Concipiamus nunc quadrantem circa rectam AC, quæ est fixa, aliquantulùm inclinari, atque in ACb pervenire, in quo cum verticali angulum faciat $BCb = \theta$. Quia jam in hoc plano ACb linea verticalis non datur, pendulum à gravitate in eo situm Cp eligere cogetur, qui à directione verticalis vera, minimè discrepet. Iste autem situs cognoscetur, si ex puncto P, in planum ACb normalis ducatur Po, tum enim perspicuum est rectam Cp per punctum hoc o transire debere; atque in hoc statu angulus ACp, distantiam stellæ à zenith indicare putabitur.

§. 28. Ad hunc igitur angulum ACp investigandum ex P ad AC quæ est communis utriusque plani intersectio, ducatur normalis PQ, ex eodemque puncto Q ad eandem AC in plano ACb educatur normalis Qo, in quam ex P, perpendiculariter ducta Po, simul in planum ACb erit normalis. Invento autem hoc puncto o, ex triangulo CQo, ad Q rectangulo, angulus quæsitus ACp, innotescet.

§. 29. Sit radius quadrantis $AC = BC = 1$, qui simul pro sinu toto habeatur, erit ob angulum $ACP = \varphi$, recta $PQ = \textit{sin.}\,\varphi$, & $CQ = \textit{cos.}\,\varphi$. Deinde angulus PQo, quia metitur inclinationem planorum ACB & ACb, erit $= \theta$, unde in triangulo QoP ad o rectangulo, fiet $Po = PQ\ \textit{sin.}\,\theta = \textit{sin.}\,\theta\ \textit{sin.}\,\varphi$, & $Qo = PQ\ \textit{cos.}\,\theta = \textit{cos.}\,\theta\,\textit{sin.}\,\varphi$. Cùm jam $\frac{Qo}{CQ}$ exprimat tangentem anguli ACp, erit $\textit{tang.}\ ACp = \frac{\textit{cos.}\,\theta\ \textit{sin.}\,\varphi}{\textit{cos.}\,\varphi} = \textit{cos.}\,\theta\ \textit{tang.}\,\varphi$, consequenter tangens ACP se habebit ad $\textit{tang.}\ ACp$, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis utriusque plani.

§. 30. Hinc patet duobus casibus errorem seu discrimen inter angulos ACP & ACp fore nullum, quantumvis etiam fuerit inclinatio plani quadrantis magna. Si enim

sit angulus $ACP = \varphi = 0$, quod fit si stella in zenith observetur, angulus ACp pariter erit $= 0$: atque si sit angulus $ACP = 90°$, seu $tang.\, \varphi = \infty$, invenitur quoque $tang.\, ACp = \infty$, ideoque $ACp = 90°$, quare si stella in horizonte versetur, inclinatio quadrantis pariter nullum errorem producit. Ex quibus jam liquet errorem fore majorem quo magis stella tam à zenith quàm ab horizonte simul fuerit remota.

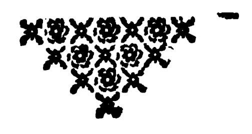
§. 31. Cùm igitur angulus ACp minor sit angulo ACP, ponatur hîc angulus $ACp = \varphi - z$, ita ut z sit error ex inclinatione quadrantis oriundus, eritque $tang.\, (\varphi - z) = cos.\, \theta\; tang.\, \varphi$: at est $tang.\, (\varphi - z) = \frac{tang.\, \varphi - tang.\, z}{1 + tang.\, \varphi\; tang.\, z}$. Unde reperietur $tang.\, z = \frac{(1 - cos.\, \theta)\; tang.\, \varphi}{1 + cos.\, \theta\; tang.\, \varphi^2}$. Si jam angulus inclinationis θ sit valdè parvus, assumere licet $cos.\, \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta\theta$. Eritque $tang.\, z = \frac{\theta\theta\; tang.\, \varphi}{2\, sec.\, \varphi^2 - \theta\theta\; tang.\, \varphi^2}$, seu ob $\theta\theta$ minimum, erit $tang.\, z = \frac{1}{2}\theta\theta\; sin.\, \varphi\; cos.\, \varphi = \frac{1}{4}\theta\theta\; sin.\, 2\varphi$. Sicque error erit maximus quando $2\varphi = 90°$. Seu quando elevatio sideris supra horizontem est $45°$.

§. 32. Generaliter autem, quantacunque sit inclinatio θ, valor ipsius φ reperietur, cui maximus error respondet, si fractionis $\frac{(1 - cos.\, \theta)\; tang.\, \varphi}{1 + cos.\, \theta\; tang.\, \varphi^2}$, seu, ob θ constans, hujus $\frac{tang.\, \varphi}{1 + cos.\, \theta\; tang.\, \varphi^2}$ differentiale, quod est $= \frac{(1 - cos.\, \theta\; tang\, \varphi^2)\, d\, tang.\, \varphi}{(1 + cos.\, \theta\; tang.\, \varphi^2)^2}$ nihilo æquale statuatur, unde fit $tang.\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{cos.\, \theta}}$; errorque z maximus huic angulo $ACP = \varphi$ respondens, definietur ex hac æquatione, $tang.\, z = \frac{(1 - cos.\, \theta) : \sqrt{cos.\, \theta}}{2} = \frac{1 - cos.\, \theta}{2\sqrt{cos.\, \theta}} = \frac{sin.\, \frac{1}{2}\theta^2}{\sqrt{cos.\, \theta}}$ ob $\frac{1 - cos.\, \theta}{2} = sin.\, \frac{1}{2}\theta^2$.

§. 33. Hinc ergo pro quavis quadrantis inclinatione maxima aberratio, quæ in observationem irrepere potest,

determinari poterit. Ponamus ergo planum quadrantis à plano verticali angulo 2° declinari, ita ut sit $\theta = 2°$ & $\frac{1}{2}\theta = 1°$, reperietur $l\ tang.\ \phi = 10.0001323$, & angulus $\phi = 45° 0' 31''$, & $l\ tang.\ z = 6.4438429$. Sicque error $z = 57''$, nequidem ad unum minutum primùm exſurget. Quando autem quadrans inter oſcillandum longiùs à plano verticali digreditur, angulusque ACp, dum ſtella in interſectione filorum conſpicitur continuò mutatur, ita ut variatio percipi queat, tum maximus angulus, qui quidem deprehenditur, veram diſtantiam ſtellæ à zenith indicabit. Interim tamen apparet, niſi inclinatio ultra duos gradus aſcendat, ne hâc quidem præcautione opus eſſe, ſed altitudinem ſtellæ ſatis exactè indicari.

§. 34. His de ſitu quadrantis in ſitu verticali notatis, in id eſt incumbendum, ut in plano quadrantis ipſa linea verticalis exibeatur, quod in terra continenti quidem commodiſſime ope penduli præſtatur. Verum in mari uſum pendulorum prorsùs repudiare cogimur; eorumque loco ejuſmodi inſtrumenta adhiberi ſolent, quæ æquilibrio fluidorum innixa, verum horizontis planum exhibeant. Ex quo genere jam plura præclara extant inſtrumenta, alibi deſcripta, quæ ad meum uſum adhibere non dubitabo, ſi forte ea, quæ hîc ſum propoſiturus, minus apta videantur.



III.

Descriptio Quadrantis Nautici.

Fig. II. §. 35. CONFICIATUR primò quadrans *AC* more solito ex metallo vel ligno durissimo quod à varia tempestate non incurvetur; ubique autem materiam homogeneam adhiberi conveniet, ut à dilatatione & contractione quæ à mutato caloris gradu, accidit figura non distorqueatur. Limbus verò *AB*, sit diligentissime in gradus & quina vel dena minuta prima divisus, quæ porrò per lineas diagonales in singula minuta subdividantur. Cujusmodi divisio pro magnitudine quadrantis vel magis vel minus distinctè exprimi poterit.

§. 36. Magnitudinem hujus quadrantis majorem non esse convenit, quàm ut ab uno homine commodè in manibus teneri ac tractari possit. Cùm igitur sustentaculo non sit opus, quo aliàs pondus valdè augetur, radius hujus quadrantis duos ferè pedes longum vel saltem sesquipedalem fieri licebit: quæ magnitudo jam divisionis satis minutæ est capax, ita ut singula ferè minuta prima discerni queant; siquidem lineis transversim ductis uti libeat. Infra autem patebit, ne hâc quidem divisione opus esse, sed sufficere si integri tantùm gradus exprimantur.

§. 37. Dioptræ *A a* & *C c* modò antè descriptæ super radio *AC*, constituantur, earumque distantia bipedalis sive sesquipedalis ad collimandum satis erit idonea, ut quævis stella per eas non difficulter detegi, sed etiam moderatione quadrantis in intersectionem filorum reduci possit, si forte pondus quadrantis observatori nimis grave videatur, quadrans ex centro *C*, suspendi poterit, ita tamen

manibus retineatur ac dirigatur; hoc enim modo Observator multùm sublevabitur.

§. 38. Venio nunc ad præcipuam quadrantis partem, pendulum, scilicet, *CGH*, quod circa centrum *C* liberrimè mobile, in fissura *GI* habeat filum tenuissimum tensum, quod in limbo quadrantis gradus & minuta distinctè indicet. Hoc igitur pendulum si perpetuò in situ verticali persisteret, statim veram stellæ distantiam à zenith patefaceret: sed in mari ob mutationem navis continuam, pendulum vix unquam in situ verticali acquiescet.

§. 39. Marginem hujus penduli in *m* & *n*, non incongruum erit replicare, ut limbum quadrantis excipiat, ita tamen ut liberrimè juxta eum moveri possit, siquidem quadrans teneat situm verticalem. Hinc enim Observator statim sentiet utrùm quadrans in plano verticali versetur, an notabiliter declinet, quo casu non difficulter in situm verticalem proximè saltem dirigetur; quantùm quidem ad certitudinem observationum requiritur.

§. 40. Parti inferiori hujus penduli, seu regulæ mobilis *CG*, in *G* connectatur tubus vitreus *EF*, crenæ arcus lignei immissus, quæ modo mox indicando sit divisa. Tubus iste vitreus autem aliquantulùm sit incurvatus, & partibus utrinque æqualibus *GE* & *GF* cum regula ad angulos rectos firmissimè conjunctus, subscudibus, scilicet, *EH* & *FH*, ut motum regulæ perfectissimè sequatur, & cum ea unum continuum pendulum constituat.

§. 41. Tubus iste vitreus aquâ seu alio liquore magis idoneo repleatur, relictâ exiguâ bullulâ aëreâ, & utrinque in *E* & *F* obstruatur, ut aëri nullus aditus pateat. Hæc ergo bullula *K*, in omni tubi situ jugiter supremum occupabit locum, & tametsi ipsa per theoriam, motum quemdam oscillatorium recipere debet, tamen effici potest, ut eum ferè singulis momentis amittat, motuque tubi non obstante,

nisi vehementer concutiatur, perpetuò in puncto tubi summo hæreat; qui effectus, quemadmodùm promptissimè produci queat, deinceps exponam.

§. 42. Curvatura tubi hujus *EF* sit, quantùm fieri potest, circularis, referatque arcum circuli, cujus centrum situm sit alicubi in recta *CGH*, producta, puta in *O*; quod punctum quò longiùs distet, eò majores evadent gradus in arcu *E F*. Quare si radius *GO* decies major accipiatur quàm radius quadrantis *AC*, singula minuta prima curvaturæ tubi satis distinctè exprimi poterunt. Nihil autem obstat, quò minus tubo huic *EF* longitudo arcui quadrantis *APB* ferè æqualis tribuatur, unde curvatura tubi 9 gradus complectetur; ita ut uterque semissis *GE* & *GF* $4\frac{1}{2}$ gradus capiat, quæ amplitudo pro motu penduli oscillatorio sufficiens videtur.

§. 43. Cùm autem nimis sit difficile tubum vitreum *EF*, tam exactè juxta arcum circuli, cujus centrum sit in dato puncto *O*, incurvare, ad præsens institutum sufficiet, dummodo proximè ejusmodi habuerit figuram. Hinc oportebit divisionem hujus tubi non geometricè, sed practicè per observationes absolvere in loco, scilicet, quieto, antequam in navim conscendatur. Neque ergo formatio istius tubi, neque ejus divisio ullâ amplius premetur difficultate.

§. 44. Quòd si autem quadrans *ACB*, cum pendulo *CIGEHF* modo exposito fuerit constructus, evidens est quemadmodùm ejus ope altitudo stellæ cujusvis cognosci queat. Dioptris enim *Aa* & *Cc* versùs stellam directis, eo momento quo stella in intersectione filorum apparet, notetur tam amplitudo arcûs *AG*, in limbo quadrantis, quem filum *GI* abscindit, quàm situs bullulæ aereæ *K*, & mensura arcûs *GK* in gradibus & minutis inventa, subtrahatur ab arcu *AG*, siquidem bullula in parte *GE* hæreat, sin
autem

autem fuerit in arcu GF, ad arcum AG addatur, ficque prodibit diftantia ftellæ à zenith.

§. 45. Concipiatur enim ducta vera lineà verticalis CP, ita ut angulus ACP metiatur diftantiam ftellæ à zenith: jam quia bulla K in tubo locum fupremum occupat, erit recta OK quoque verticalis, ideòque angulus GOK, quem arcus GK indicat, æqualis erit angulo GCP. Quamobrem angulus ACP, feu vera diftantia à zenith obtinebitur, fi ab angulo ACG quem pendulum in limbo quadrantis abfcindit, fubtrahatur angulus GOK quem fitus bullæ indicat.

§. 46. Quò autem hæc faciliùs expediri queant, pendulum CG cochleâ munitum effe conveniet, quâ pendulum ad limbum quadrantis firmari, ejufque motus ofcillatorius penitùs coerceri queat. Adigatur autem hæc cochlea tum, quando pendulum non multùm à fitu verticali CP, dum ftella in interfectione dioptræ confpicitur, diftare æftimabitur: ut deinceps ad folum fitum bullæ in tubo EF refpicere fufficiat.

§. 47. Vel cùm altitudo fideris jam ad aliquot tantùm gradus fuerit explorata, pendulum ope cochleæ firmetur in divifione quadam infigniori limbi, quâ integer gradus indicetur. Quo facto minifter adftans fedulò bullam in tubo EF infpiciat, ut fimul atque Obfervator fignum dederit, fe ftellam in interfectione filorum contueri, locum bullæ exactè affignare poffit. Tum enim numerus minutorum arcûs GK ab arcu AG jam antè cognito, vel fubtractus, vel ad eum additus, præbebit diftantiam ftellæ à zenith. Hinc intelligitur fufficere, fi limbus quadrantis tantùm in integros gradus dividatur, atque ulteriori divifione facilè jam carere poterimus.

§. 48. Ad has autem obfervationes accuratè inftituendas exercitio frequenti opus erit; quo Obfervator fibi facilè habitum comparabit quadrantem hunc, fi modo

idoneo fuerit suspensus, commodè tractandi, & quantum fieri potest, ejus motus violentiores compescendi. Neque mihi quidem videtur ad hoc negotium tantùm solertiæ requiri, quantùm vulgò tractatio Quadrantis Anglici postulare solet.

§. 49. Quando enim Observator pendulum jam in situ *CG*, à verticali *CP*, non multùm remoto firmaverit; tum pendulum alio motu, nisi qui sit ipsi quadranti communis concitari non poterit; hunc autem Observator obsequendo, ita temperare poterit, ut fiat lentissimus, præcipuè quando stellam in intersectione filorum conspicit. Hocque modo ipsa bulla aërea non sensibiliter movebitur, atque famulus seu socius Observatoris non difficulter, momento imperato, locum bullæ dignoscet.

§. 50. Non solùm autem hæc motûs penduli imminutio ideo est necessaria, quo locus bullæ certiùs notari queat, sed etiam bulla eò accuratiùs se in locum tubi supremum recipit, multoque minus ultrò citròque vagabitur, quò tardior fuerit motus. Hisque circumstantiis probè perpensis, non dubito quin ope hujus quadrantis, dummodò Observator sibi modicam solertiam acquisiverit, cujusque stellæ vera altitudo tam accuratè observari possit, ut error vix ultra minutum exsurgat, & majorem quidem certitudinis gradum super mari expectare non licet.

§. 51. Quamquam autem hoc modo incertitudo, quæ à motu bullæ oscillatorio ejusve segnitie proficiscitur, quoad maximam partem tollitur, tamen structura quoque tubi talis effici potest, ut bulla quàm promtissimè, situm supremum affectet, ibique perseveret. Hoc, scilicet, præstabitur, si tubusnon nimis fiat angustus, bullæque modica quantitas relinquatur, quæ res ut sint ad scopum maximè accommodatæ, cùm judicio, tum experientiâ à solerti artifice non difficulter definientur; quare descriptioni hujus instrumenti

quod mihi quidem plurimis aliis ad hunc finem propositis, palmam præripere videtur, diutiùs non immoror.

I V.

Descriptio alius Quadrantis Nautici.

§. 52. NISI aliæ circumstantiæ impediant, quominus longitudo penduli tres pedes superare possit; tum ipsi pendulo adjungi posset barometrum *GIHKL* Bernoullianum, scilicet, quòd minimas mutationes mercurii in tubo angusto *KL*, satis distinctè indicet. Cùm enim mercurius in omni situ eandem altitudinem verticalem teneat, dum pendulum tantillùm inclinatur, mercurius in tubo *LK*, recedet notabiliter, unde vicissim ex loco mercurii *S* inclinatio penduli cognosci posset. Fig. III.

§. 53. Quia verò difficile foret quovis tempore veram altitudinem Barometri cognoscere, atque recessus mercurii *S*, in tubo horizontali *LK* non solùm ab inclinatione penduli, sed etiam à declinatione plani quadrantis proveniat, ac præterea istæ mutationes ob frictionem ne in terra satis sint certæ, Barometrorum usum ad pendula mari perficienda penitùs rejiciendum esse arbitror. Quocirca aliam ideam ab æquilibrio tuborum communicantium desumptam proponam; quæ tamen illâ, quam suprà descripsi, non parum præstantior mihi quidem videtur.

§. 54. Confecto, scilicet, quadrante *ACB*, modo suprà descripto, cum pendulo *CIG*, infra connectatur ad angulos rectos, tabula seu regula *EF* ad quam firmatus sit tubus recurvus *DEFH*, cujus ramus *DE*, multò sit amplior quàm ramus *FH*, quem gracillum esse convenit, ut minimæ mutationi liquoris in tubo *DE*, satis magna Fig. IV.

mutatio in tubo *FH* respondeat: tubus iste liquore quodam seu argento vivo impleatur, præstoque sit obturaculum, quo tubus *DE* obstrui possit, si reponatur ne liquor effluat.

§. 55. Ponamus liquorem, quando pendulum in situ verticali pendet, in *m* & *o* subsistere, ita ut recta *mo* tum sit horizontalis. Quando autem pendulum extra situm verticalem versatur, uti figurâ repræsentatur, in tubo ampliori *DE* liquor aliquantulùm ascendet, in angustiori verò subsidet in *n*, ut jam recta *mn* sit horizontalis. Mutatio in tubo ampliori hinc facta minima, & vix perceptibilis erit, cùm mutatio in angustiori, seu intervallum *no* satis sit notabile.

§. 56. Quoniam igitur recta *mn*, ad veram lineam verticalem *CP* est normalis, angulus *omn*, erit æqualis angulo *GCP*, seu declinationi penduli à situ verticali. Cùm itaque punctum *o* constet ex mutatione in tubo *FH*, seu intervallo *no*, cognosci poterit angulus *omn*, qui ab angulo *ACG* substractus, relinquet angulum *ACP* veram distantiæ stellæ à zenith mensuram. Tantùm igitur opus est, ut ad tubum *FH* divisio in gradibus & minutis adscribatur, quæ singulis punctis *n* respondeat, hocque aptissimè à perito artifice præstabitur.

§. 57. Si amplitudo tubi angustioris *FH* præ ampliori *DE* evanescat, ramusque *FH* ad basin *EF* fuerit perpendicularis, tum intervallum *no* erit tangens anguli *omn*, si sinus totus per *mo* exprimatur. Quare quò longior fuerit tubus *EF*, eò majora intervalla *no* iisdem angulis declinationum respondebunt; sin autem crus *FH* ad basin *EF* inclinetur, eò magis intervalla *no* augebuntur, sicque minimæ mutationes penduli à situ verticali satis sensibiliter exprimi poterunt.

§. 58. Ut autem liquor promtissimè se semper ad

æquilibrium componat, neque motu oscillatorio observationem incertam reddat, tubi partem EF pariter multo ampliorem fieri conveniet tubo FH. Quò amplior enim fuerit hic tubus EF, eò celeriores erunt oscillationes atque primo quasi momento extinguentur.

§. 59. Pendulo ergo hac ratione instructo, usus hujus quadrantis non discrepabit à præcedente. Firmato, scilicet, pendulo cochleâ, in situ à verticali CP parùm remoto, si summitas liquoris n in tubo FH accuratè notetur eo ipso momento, quo observator stellam in intersectione spectat, cognoscetur inde distantia lineæ verticalis veræ CP à loco penduli GI: unde angulus quæsitus ACP innotescet.

V.

Determinatio Meridiei.

§. 60. PRIMUM igitur sol certissimus est index temporis veri, quo cognito, non difficulter inde tempus medium colligitur. Tempus autem à meridie numerari solet, seu ab eo momento quo solis centrum per meridianum loci, in quo versamur, transit: unde si in mari meridianum dignoscere liceret, observatio transitûs solis per meridianum facillimè momentum meridiei ostenderet, neque ad hoc ullà observatione altitudinis opus esset.

§. 61. Cùm autem linea meridiana minimè constet, verum meridiei momentum aliter definire nequit. Hinc circa meridiem cujus tempus saltem propè constare assumo, sæpissimè altitudo solis observetur, instrumento vel consueto, vel alio quod magis idoneum videbitur, quæ

quamdiu crescit, tempus adhuc antemeridianum indicat, simul ac verò decrescere incipit, pomeridianum declarat.

§. 62. Eo ergo momento, quo solis altitudo crescere desinit, atque decrescere incipit, meridies evenisse censendus est. Verùm quia altitudo solis in ipso meridie per notabile temporis intervallum insensibiliter mutatur, atque adhibitis etiam optimis instrumentis in observatione altitudinis error unius minuti committi potest, hoc modo nimis incertè momentum meridiei assignaretur. Interim tamen hæc observatio maximæ solis altitudinis non est intermittenda, cùm ex ea, ob declinationem solis cognitam, elevatio poli determinetur, cujus cognitio non solùm in universa navigatione maximi est momenti, sed etiam ad ipsam horam cognoscendam magnum adjumentum affert.

§. 63. Ad tempus ergo meridiei exactiùs definiendum præstabit duabus solis altitudinibus æqualibus uti, quarum altera ante, altera post meridiem sit facta, tum autem momentum medium inter has duas observationes meridiem indicabit sub his conditionibus; si primò solis declinatio non fuerit interea immutata; secundò si ipsa navis interea quieverit, ac tertiò si observationes nullis erroribus sint inquinatæ.

§. 64. Ante omnia igitur necesse est, ut hoc ipsum intervallum temporis, inter binas observationes elapsi exactè metiri valeamus, quod nisi id plures horas superet, fieri posse inter postulata est relatum. Nisi enim tempus per aliquod saltem intervallum ope clepsydræ seu automati exactè mensurari posset, tum ipsa temporis determinatio per observationes omninò esset inutilis, quia non tam determinatio unici cujusdam momenti, sed emendatio notabilis cujuspiam temporis intervalli desideratur.

§. 65. Quod jam ad tres antè memoratas circumstantias

attinet, ad quas attendi oportet, si meridiem ex duabus altitudinibus solis æqualibus determinare velimus; earum prima, quæ variatione solis declinationis continetur, jam satis est explorata, cùm habeantur tabulæ æquationis meridiei ad singulos gradus elevationis poli supputatæ, quibus differentia veri meridiei & momenti inter observationes medii indicatur. Quando autem intervallum observationum non quatuor horas superat, quod aliæ quoque rationes prohibent, ne hac quidem correctione opus erit, cùm multo minor sit, quàm errores qui in observationibus evitari nequaquam possunt.

§. 66. Altera difficultas, quæ à motu navis oritur, quæstioni propositæ penitùs est propria; ad quam igitur removendam eò majorem operam adhibebo, quòd reliqua hujusmodi observationum momenta in omnibus ferè elementis tradi solent, hæc verò observationum perturbatio à motu navis oriunda nusquam satis diligenter explicata reperiatur. Quamquam autem accuratam itineris à nave confecti cognitionem inter postulata referre non licet, tamen quantùm navis intervallo aliquot horarum processerit, satis exactè æstimari posse, quantùm quidem ad horæ determinationem opus est, jure assumo.

§. 67. Ex æstimatione igitur itineris, quod navis intervallo duarum illarum observationum, quibus eadem solis altitudo apparuit, satis accuratè colligi potest, quantùm tam longitudo, quàm latitudo navis interea fuerit mutata. Si enim noverimus quot milliaria anglica vel boream vel austrum versùs absolverit, poli elevatio totidem minutis primis vel major vel minor evasit, in hoc enim negotio mentem tutò, à sphæroidica terræ figura abstrahimus, quoniam minutiarum omissio, horæ determinationem non turbat.

§. 68. Deinde æquè facilè ex itinere æstimatio judicatur,

quantùm navis vel ortum vel occaſum verſum ſecundùm circulum æquatori parallelum interea ſit progreſſa. Ut autem hinc variatio longitudinis in minutis definiri poſſit, elevationem poli noſſe oportet, cujus autem cognitio ſatis craſſa ad hoc inſtitutum ſufficit. Si enim vel aliquot gradibus in elevatione poli erraverimus, tamen error qui inde in æſtimationem variationis longitudinis redundat, omninò erit imperceptibilis.

§. 69. Quamquam autem navis plerumque in hoc intervallo tam longitudinem quàm latitudinem ſimul immutat, tamen utramque mutationem hîc ſeorſim perpendam. Si enim oſtendero, quomodo concluſio ex obſervationibus reſpondentibus deducenda tam ratione longitudinis quàm latitudinis mutatæ corrigi debeat ſingulatim; his ambabus correctionibus ſimul uti oportebit quando navis interea tam longitudinem quàm latitudinem mutaverit. Interea autem declinationem ſolis invariatam conſidero, quia error inde oriundus jam eſt definitus.

§. 70. Ponamus ergo intervallo duarum illarum obſervationum ſolis, ſolam navis longitudinem eſſe mutatam, dato minutorum numero, latitudinem verò eandem manſiſſe. Sit in ſphæra cœleſti *P* polus, & *S* locus ſolis immobilis, ita ut terra, quæ in centro hujus ſphæræ poſita concipiatur, ejus reſpectu circa axem ſpatio 24 horarum ſolarium giretur. Sit *A* zenith loci navis tempore primæ obſervationis, *B* verò zenith navis momento alterius obſervationis. Quia ergo in utroque ſitu tam eadem à polo diſtantia ſervatur, quàm utrinque eadem ſolis à zenith diſtantia obſervatur, erit $AP = BP$, & $AS = BS$.

Fig. V.

§. 71. Hinc meridianus *PS*, angulum horarium *APB* biſecabit, unde ſequitur tempore inter obſervationes medio, meridiem fuiſſe ſub meridiano *PCS*; eo autem tempore navim ſub ipſo meridiano in *C* extitiſſe, ſiquidem interea

interea motu uniformi fuerit secundùm longitudinem promota, perspicuum est. Unde momento inter duas observationes medio meridies verus incidit sub ipso meridiano, ubi tum navis est versata. Cùm enim navis zenith interea viam *AB* descripserit cum motu proprio, tum motu toti terræ communi, & uterque motus sit uniformis, necesse est navim tempore medio in ipso puncto *C* hæsisse.

§. 72. Quò distinctiùs, quæ hinc consequuntur, enunciare possimus, ponamus inter momenta observationum in *A* & *B*, elapsas esse quatuor horas, navemque interea ab occidente in orientem secundùm longitudinem absolvisse unum gradum. Quando igitur navis in *B* versatur, dicendum est ante bihorium meridiem incidisse, non sub meridiano *PB*, sub quo navis nunc est, sed sub meridiano *PC*, per quem navis ante duas horas transierit.

§. 73. Quia ergo navis intra hoc bihorium dimidium gradum secundùm longitudinem confecisse ponitur, quòd in tempore duo minuta prima, sub meridiano *BP*, in quo navis nunc reperitur, ut pote orientaliori, necesse est ut meridies duobus minutis primis citiùs, hoc est, ante $2^h\ 2'$ eveniret, ita ut hoc momento in loco navis *B*, vera diei hora statuenda sit $2^h\ 2'$. Simili modo, dum navis tempore primæ observationis, in *A* hæserat, horologia solaria indicare debuerunt $9^h\ 58'$ ante meridiem.

§. 74. Ex his ergo perspicuum est quomodo ex dato intervallo duarum observationum & variatione longitudinis interea absolutâ, tempus verum, quod, scilicet, horologia solaria indicarent, pro quovis loco navis medio definiri debeat. Atque si æquabilis temporis lapsus tam ante quàm post observationes, fuerit in solis & minutis solaribus animadversus, etiam ea tempora ad horologia solaria emendari poterunt; siquidem mutationis longitudinis, quam navis continuò subit, ratio habeatur.

$l.\,tang.\,p = 10{,}0455626 \quad l.\,tang.\,s = 9{,}4987223 \quad \frac{tang.\,p}{tang.\,c} = 1{,}323$

$l.\,tang.\,c = 9{,}9238135 \quad l.\,fin.\,c = 9{,}8080675$

$0{,}1217491 \quad\quad 9{,}6906548 \quad \frac{tang.\,s}{fin.\,c} = \frac{0{,}490}{0{,}833}$

$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{}$

$z = 1',666 = 1'40''$

Hoc ergo casu ad tempus medium inter observationes elapsum addi debet 1′ 40″ ut prodeat verum meridiei momentum.

§. 81. Major prodit hæc correctio si declinatio solis satis sit australis, quia tum *tang. s*, signum contrarium obtinebit, fitque $z = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{tang.\,p}{tang.\,c} + \frac{tang.\,s}{fin.\,c}\right)$, cujus ut exemplum afferamus, sit altitudo poli $p = 60°$; declinatio solis australis $= 23°\ 28' = -s$; intervallum observationum $= 3^h 40'$, seu in angulo $= 55° = 2c$; ideoque $c = 27°\ 30'$; interea verò navis austrum versùs confecerit 36′: erit $\pi = -36'$, & in tempore $\frac{1}{2}\pi = -1'\ 12''$: unde calculus ita se habebit:

$l.\,tang.\,p = 10{,}2385606 \quad l.\,tang.\,s = 9{,}6001181 \quad \frac{tang.\,p}{tang.\,c} = 3{,}327$

$l.\,tang.\,c = 9{,}7164767 \quad l.\,fin.\,c = 9{,}6644056$

$0{,}5220839 \quad\quad 9{,}9357125 \quad \frac{tang.\,s}{fin.\,c} = \frac{0{,}862}{4{,}189}$

$-\frac{1}{2}\pi = -1\frac{1}{5}$

$z = -5',027 = -5'\ 1''$

Hoc ergo casu à momento inter observationes medio subtrahi debet 5′ 1″, ut verum meridiei tempus habeatur.

§. 82. Possent hinc ad singulos gradus tum declinationis solis, tum elevationis poli pro præcipuis temporis intervallis tabulæ computari, quæ valores $\frac{tang.\,p}{tang.\,c} + \frac{tang.\,s}{fin.\,c}$ exhiberent, tum enim numeri hujus tabulæ per semissem variationis latitudinis $\frac{1}{2}\pi$ multiplicati & in tempus conversi; dabunt correctionem meridiei ex hoc capite necessariam. Sufficiat autem hìc regulam ad computum satis fidelem tradidisse, & cùm aliæ determinationes difficiliores

calculos requirant, hujusmodi tabulis facilè carere poterimus.

§. 83. Antequam autem hoc argumentum deseram, notasse conveniet ex illis duabus altitudinibus solis æqualibus facilè elevationem poli veram pro tempore meridiei assignari posse. Si enim p denotet hanc poli elevationem, eliminata supra littera Z, perveniet ad hanc æquationem, $cos.\, c = \frac{sin.\, a - sin.\, p\, sin.\, s}{cos.\, p\, cos.\, s}$, seu $sin.\, a = sin.\, s\, sin.\, p + cos.\, c\, cos.\, s\, cos.\, p$. Ex qua sequenti modo, ut extractione radicis non sit opus, valor p elicietur. Quæratur primò angulus v, ut sit $tang.\, v = \frac{sin.\, s}{cos.\, c\, cos.\, s}$, eritque $sin.\, a = cos.\, c\, cos.\, s\, tang.\, v\, sin.\, p + cos.\, c\, cos.\, s\, cos.\, p = \frac{cos.\, c\, cos.\, s}{cos.\, v}\,(sin.\, v\, sin.\, p + cos.\, v\, cos.\, p)$, ac porro $\frac{sin.\, a\, cos.\, v}{cos.\, c\, cos.\, s} = cos.\,(p - v)$. Hinc ergo commodè innotescit angulus $p - v$, ex eoque porro altitudo poli quæsita p.

§. 84. Quamquam cognitio elevationis poli maximi est momenti, tamen ne nimis longè à quæstione propositâ digrediar, neque hanc formulam uberiùs explico, neque in sequentibus peculiarem operam, ad elevationem poli investigandam adhibebo, sed vel aliunde jam poli elevationem cognitam esse assumam, vel quomodo conjunctim cum hora diei ex observationibus concludi possit, docebo. Nunc igitur restat, ut inquiram quantùm determinatio meridiei ab ipsis observationum erroribus afficiatur, neque plures modos meridiem determinandi afferam, cùm omnes sequentes modi horam diei determinandi simul ad meridiem respiciant, eumque definiant.

§. 85. Dum autem in turbationem ab ipsis observationum erroribus oriundam inquiro, reliquas anomalias omnes segrego, cùm quia eas jam sum contemplatus, tum verò, quoniam, quid omnes conjunctim efficiant, ex

ſingulis ſeorſim concludi poteſt. Tam ſolis ergo declinationem, quàm ſitum navis immutabilem nunc conſidero, atque cùm in binas illas obſervationes duplex error irrepere poſſit, alter in altitudinibus ſolis, alter in æſtimatione intervalli temporis interea elapſi, utrumque pariter ſeorſim evolvam.

§. 86. Cùm igitur in utraque obſervatione, ſolis altitudo $= a$ putetur, ponamus diſcrimen inter ſolis altitudines eſſe $= \alpha$, ita ut, ſi altitudo primæ obſervationis fuerit $= a$, altitudo ſolis in altera obſervatione reverâ ſit $= a \pm \alpha$, denotabitque α errorem quem in obſervatione altitudinis committere poſſumus; hicque duplicatus eſſe poterit, ſi quidem altera in defectu, altera in exceſſu peccaverit. Unde ſi in una obſervatione duobus minutis errari queat, fieri poterit ut α fiat $= 4'$, quod tamen rariſſimè evenire cenſendum eſt.

§. 87. Ob hunc ergo errorem momentum meridiei à medio intervallo inter obſervationes elapſo pariter non nihil diſcrepabit. Sit ergo totum intervallum obſervationum in angulum converſum $= 2c$, & intervallum inter primam obſervationem & meridiem $= c + z$, erit intervallum à meridie ad ſecundam obſervationem $= c - z$. Unde ſi declinatio ſolis ſit $= s$, elevatio poli $= p$, habebuntur duæ ſequentes æquationes:

$$\text{I. } cof.\,(c + z) = \frac{fin.\,a - fin.\,p\,fin.\,s}{cof.\,p\,cof.\,s},$$

$$\text{II. } cof.\,(c - z) = \frac{fin.\,(a \pm \alpha) - fin.\,p\,fin.\,s}{cof.\,p\,cof.\,s}.$$

§. 88. Cùm jam ob z & α valdè parva, ſit $cof.\,(c + z) = cof.\,c - z\,fin.\,c$, & $cof.\,(c - z) = cof.\,c + z\,fin.\,c$, atque $fin.\,(a \pm \alpha) = fin.\,a \pm \alpha\,cof.\,a$. Si prorſus æquatio à poſteriori ſubtrahatur, relinquetur $2\,z\,fin.\,c = \frac{\pm \alpha\,cof.\,a}{cof.\,p\,cof.\,s}$, ideo-

que $z = \pm \frac{1}{2} \alpha \frac{\text{cof.}\, a}{\text{fin.}\, c\ \text{cof.}\, p\ \text{cof.}\, s}$: unde ſi angulus $\frac{1}{2}\alpha$ in tempus convertatur, ſtatim prodibit error meridiei z in tempore expreſſus. Sic ſi α æſtimetur $5'$, hoc in tempore dabit $20''$, fietque $\frac{1}{2}\alpha = 10''$ temporis. Sit jam $2c = 2$ horas, ſeu angulus $c = 15^\circ$, elevatio poli $p = 60^\circ$, declinatio ſolis $s = 23^\circ +$ altitudo $a = 6^\circ$: reperietur $z = \pm 83''$. Quamquam ergo in hoc exemplo omnia obſervationem meridiei maximè perturbare aſſumta ſunt, tamen momentum meridiei tantùm ad $1'\,23''$, incertum relinquitur.

§. 89. Quamvis igitur hunc errorem neque tollere neque emendare valeamus, tamen neceſſe fuit noſſe, quantùm ab eo determinatio meridiei impediatur; & quoniam reliquæ circumſtantiæ majorem accurationem non admittunt, ut intra minutum primum de vero meridiei momento certi eſſe queamus; hunc errorem eò faciliùs negligere poterimus, quòd eo incertitudo veri momenti meridiei notabiliter non afficiatur.

§. 90. Quod denique ad errorem, qui forte in æſtimatione temporis inter binas obſervationes elapſi, committitur, manifeſtum eſt, eo verum meridiei momentum à medio intervallo non removeri: neque ergo propterea correctione opus eſſet, etiamſi iſtum errorem definire poſſemus. Quamobrem methodo hîc expoſita, verum meridiei momentum tam accuratè definiri poſſe aſſumo, ut vix uno minuto primo à veritate aberret; valdèque dubito, an major certitudinis gradus obtineri queat. Multò tamen exactiùs definiri poterit, ſi plures obſervationes ſimul inſtituantur, atque inter omnes concluſiones medium quoddam eligatur.

VI.

Determinatio horæ diei per observationes Solis.

§. 91. IN præcedenti articulo ad solum momentum meridiei respeximus, à quo reliquæ horæ tam diurnæ quàm nocturnæ sunt numerandæ; nunc igitur docendum est, quomodo ex altitudinibus solis accuratè observatis, tam ante quàm post meridiem, vera diei hora colligi debeat, quæ, scilicet, ei meridiano, sub quo navis tempore observationis versatur, conveniat; perpetuò enim tenendum est eam horam requiri, quam exquisitissimum horologium solare, si tali uti liceret, in eodem loco eodemque tempore esset indicaturum.

§. 92. Hîc statim se offerunt duo casus, prout elevatio poli vel cognita fuerit vel incognita. Declinationem enim solis, quæ in determinationem temporis ingreditur, perpetuò cognitam esse assumo. Namque ephemerides solis imprimis ad manus esse oportet, ex quibus ad quodvis momentum ejus loci ad quod sunt computatæ, declinatio solis facilè colligitur. Etsi autem, ut idem sub alio meridiano inde præstari possit, differentiam meridianorum nosse oportet, tamen vix unquam navis in ejusmodi statu versatur, quin ejus longitudo ad aliquot gradus cognoscatur. Error autem vel quindecim graduum hic commissus in declinatione solis nunquam errorem unius minuti parit; unde in hoc negotio declinationem solis omninò inter cognita referre licet.

§. 93. Ponamus ergo primò elevationem poli esse cognitam, sive ea nunc demum sit ex observationibus

collecta

collecta, sive jam ante non nimis magnum tempus definita, ita ut variatio, quæ interea ob motum navis sit facta, ex æstimatione itineris satis exactè assignari queat. Cognita autem elevatione poli cum declinatione solis, ex observatione altitudinis solis facilè hora diei, sive antemeridiana sive pomeridiana determinatur. Si enim ponatur elevatio poli $= p$, declinatio solis borealis $= s$ (pro australi arcum s ejusque proinde sinum negativè accipi oportet, manente ejus cosinu), altitudo solis observata $= a$, & tempus à meridie in arcum æquatoris conversum $= x$, erit

$$cos. x = \frac{fin. a - fin. p\, fin. s}{cos. p\, cos. s}.$$

§. 94. Ex hac ergo formula definitur angulus x, qui in tempus conversus, quindecim gradus uni horæ tribuendo, habebitur vel hora antemeridiana vel pomeridiana tempore observationis, quorum utrum locum habeat, dubium esse nequit. Quò autem hic calculus faciliùs ope logarithmorum absolvi possit, quia est $fin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{cos. p\, cos. s + fin. p\, fin. s - fin. a}{2\, cos. p\, cos. s}} = \sqrt{\frac{cos. (p - s) - fin. a}{2\, cos. p\, cos. s}}$, cum jam sit $\frac{cos. A - cos. B}{2} = fin. \frac{A + B}{2} \times fin. \frac{B - A}{2}$, & $fin. a = cos. (90^\circ - a)$, erit $\frac{cos. (p - s) - cos. (90^\circ - a)}{2} = fin. \frac{90^\circ - a + p - s}{2}$. $fin. \frac{90^\circ - a - p + s}{2}$, ideoque habebitur $fin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{fin. \frac{90^\circ - a + p - s}{2} \times fin. \frac{90^\circ - a - p + s}{2}}{cos. p\, cos. s}\, rr}$, denotante r sinum totum, quem hactenus posui $= 1$.

§. 95. Quò usus hujus formulæ exemplo illustretur, sit elevatio poli $p = 52^\circ\ 27'$, declinatio solis australis $- s = 9^\circ\ 15'$, seu $s = - 9^\circ\ 15'$, & observata sit ante meridiem altitudo solis $a = 19^\circ\ 25'$, calculus ita se habebit.

$$p = 52^\circ 27' \qquad a = 19^\circ 25'$$
$$s = -9^\circ 15' \qquad 90 - a = 70^\circ 35'$$
$$p - s = 61^\circ 42' \qquad \frac{90-a}{2} = 35^\circ 17' 30''$$
$$\frac{p-s}{2} = 30^\circ 51' \qquad \frac{p-s}{2} = 30^\circ 51' 0''$$
$$\frac{90-a+p-s}{2} = 66^\circ 8' 30''$$
$$\frac{90-a-p+s}{2} = 4^\circ 26' 30''$$

$$l.\,sin.\,\frac{90-a+p-s}{2} = 9,9612067$$
$$l.\,sin.\,\frac{90-a-p+s}{2} = 8,8889885$$
$$add.\ l.\,rr \ldots\ldots 38,8501950 = A$$
$$l.\,cos.\,p \ldots = 9,7849406$$
$$l.\,cos.\,s \ldots = 9,9943156$$
$$19,7792562 = B$$
$$A - B = 19,0709388$$
$$l.\,sin.\,\tfrac{1}{2}x = 9,5354694$$
$$\tfrac{1}{2}x = 20^\circ 4' 5''$$

Erit ergo $x = 40^\circ 8' 10''$, qui arcus in tempus conversus dat $2^h 40' 33''$, ita ut observatio facta sit $9^h 19' 27''$ tempore vero.

§. 96. Cùm autem in altitudine solis a error aliquot minutorum possit esse commissus, hinc hora inventa incerta reddetur; quanta ergo sit hæc incertitudo, operæ pretium erit indagare. Sit ergo altitudo solis vera $= a + \alpha$, ubi α errorem in observatione commissum denotet atque tempus à meridie in angulum conversum sit reverâ $x + \xi$, erit $cos.\,x = \frac{sin.\,a - sin.\,p\,sin.\,s}{cos.\,p\,cos.\,s}$, & $cos.\,(x + \xi) = \frac{sin.\,(a+\alpha) - sin.\,p\,sin.\,s}{cos.\,p\,cos.\,s}$. Jam quia ob α & ξ valdè parva, est $cos.\,(x + \xi) = cos.\,x - \xi\,sin.\,x$, & $sin.\,(a + \alpha) = sin.\,a + \alpha\,cos.\,a$; erit $\xi\,sin.\,x = \frac{-\alpha\,cos.\,a}{cos.\,p\,cos.\,s}$ & $\xi = -\alpha\,\frac{cos.\,a}{cos.\,p\,cos.\,s\,sin.\,x}$.

§. 97. Error igitur in tempus redundans eò erit major, quò 1. Minus observatio distet à meridie. 2. Quò major fuerit declinatio solis. 3. Quò major fuerit elevatio poli. Et 4. Quò minor sit altitudo solis. In exemplo ergo antè allato, quo erat $p = 52^\circ 27'$, $s = -9^\circ 15'$, $a = 19^\circ 25'$, & $x = 40^\circ 8'$, error erit $\xi = -2,433\,\alpha$. Unde si α seu error in altitudine commissus sit $= 5'$, seu in tempore $= 20''$, erit error in horæ determinationem inde ortus $= 48''$ qui, cùm integrum minutum non exhauriat,

facilè negligi poteſt, præſertim ſi error altitudinis infra $5'$ ſubſiſtat.

§. 98. Formula inventa $\zeta = -\alpha \frac{cof.\, a}{cof.\, p\, cof.\, s\, fin.\, x}$ in ipſo meridie ubi $x = 0$, errorem infinitum indicare videtur: ſed notandum eſt hoc caſu quia ζ præ x non ampliùs tanquam evaneſcens conſiderari poteſt, eam formulam non valere. Si enim ſit $x = 0$, erit $fin.\, a = cof.\, p\, cof.\, s + fin.\, p\, fin.\, s = cof.\, (p - s)$, & $cof.\, a = fin.\, p\, cof.\, s - cof.\, p\, fin.\, s$. Cùm ergo ſit $cof.\, \zeta = \frac{fin.\, (a + \alpha) - fin.\, p\, fin.\, s}{cof.\, p\, cof.\, s} = \frac{fin.\, a\, cof.\, \alpha + cof.\, a\, fin.\, \alpha - fin.\, p\, fin.\, s}{cof.\, p\, cof.\, s}$, ob $cof.\, \zeta = 1 - \frac{1}{2}\zeta\zeta$, $cof.\, \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha\alpha$, & $fin.\, \alpha = \alpha$ erit $1 - \frac{1}{2}\zeta\zeta = \frac{cof.\, p\, cof.\, s + \alpha\, fin.\, (p - s)}{cof.\, p\, cof.\, s}$; ideòque $\zeta\zeta = \frac{-2\alpha\, fin.\, (p - s)}{cof.\, p\, cof.\, s} = -2\alpha\, (tang.\, p - tang.\, s)$. Sit $tang.\, p - tang.\, s = n$ poſito radio $= 1$, eritque $\zeta\zeta = 2\, n\, \alpha$; (mutato ſigno erroris α) ponatur $\alpha = 5' = \frac{1}{12}{}^{\circ}$; & ob radium $1 = 57\frac{1}{3}{}^{\circ} = 3438'$, fiet $\zeta = \sqrt{343 80\, n}$ minus $= 186' \sqrt{n}$, & in tempore erit error $12'\, 24''\, \sqrt{n}$. Qui error cùm nimis ſit magnus, ante peculiarem methodum meridiem inveniendi tradidi.

§. 99. Si in elevatione poli p error committatur, qui ſit dp, in angulo quoque horario x error naſcetur qui ſit dx, hicque ex differentiatione æquationis $cof.\, x = \frac{fin.\, a - fin.\, p\, fin.\, s}{cof.\, p\, cof.\, s}$ ponendis x & p variabilibus cognoſcetur, erit namque $-dx\, fin.\, x = \frac{-dp\, fin.\, s}{cof.\, s} + \frac{dp\, fin.\, p\, (fin.\, a - fin.\, p\, fin.\, s)}{cof.\, p^2\, cof.\, s}$, & $dx = \frac{dp\, (fin.\, s - fin.\, a\, fin.\, p)}{cof.\, p^2\, cof.\, s\, fin.\, x}$. Qui error iterùm, niſi circa ipſum meridiem, facilè tolerari poteſt, dummodo elevatio poli non nimis aberret.

§. 100. In ortu vel ocaſu ſolis, quem ſine inſtrumentis obſervare licet, dummodo refractionis ratio habeatur, quemadmodum illuſtriſſ. Dominus de Maupertuis, in

Astronomia Nautica docet, hora diei, siquidem elevatio poli & declinatio solis sit nota, facillimè definietur. Cùm enim tum sit $\alpha = o$, erit $cos.\, x = \frac{-\,sin.\,p\,sin.\,s}{cos.\,p\,cos.\,s} = -\,tang.\,p\; tang.\,s$: unde si declinatio solis sit borealis, fiet $x > 90°$, contra verò minor & utroque casu angulus x in tempus conversus, monstrabit verum momentum vel ortûs solis vel occasûs tempore.

§. 101. Quia hactenus altitudinem poli satis exactè cognitam assumsi, nunc ad alteram hujus sectionis partem progrediar, investigaturus quomodo horam diei per observationes solis definiri conveniat, si elevatio poli penitùs sit incognita. Ac primo quidem liquet hoc per unicam solis observationem præstari non posse, sed ad minimum duas altitudines solis adhiberi debere. Hincque ergo non solùm ad tempus interea præterlapsum, sed etiam ad variationem declinationis solis, & potissimùm ad mutationem loci, quam navis interea subierit, erit respiciendum, quibus rebus hæc determinatio non parum difficilis redditur.

§. 102. Ut has difficultates paulatim superemus, ponamus primò navem situm non mutare, atque ex duabus altitudinibus solis, dato temporis intervallo, observatis, facilè invenietur verum tempus pro utravis observatione; sive solis declinatio interea mutetur, sive minus. Sit enim
Fig. VII. HOZ meridianus loci, in quo navis existit, P polus, Z zenith, A & a loca solis binis observationum momentis, dabunturque arcus AP, aP quippe declinationum solis complementa; simulque ex tempore præterlapso cognoscitur angulus APa, præterea verò dantur arcus verticalium circulorum ZA, Za, ut pote altitudinum observatarum complementa.

§. 103. Jam per puncta A & a concipiatur ductus arcus

circuli maximi, quo quidem non via à sole percursa, præsentabitur, & in triangulo sphærico APa ex datis lateribus AP & aP, cum angulo intercepto APa invenietur latus Aa & anguli PAa, & PaA. Tum in triangulo AZa, cognitis omnibus lateribus, reperientur anguli ZAa, ZaA; ex quibus cum angulis PAa & PaA collatis, elicientur anguli ZAP & ZaP, hincque denique in triangulo ZAP, ob data latera ZA, PA & angulum ZAP, invenietur latus PZ complementum elevationis poli, & angulus ZPA, quo tempus alterius observationis à meridie indicabitur.

§. 104. Cùm igitur hic casus nihil habeat difficultatis, ponamus navem interea cursu suo tantùm longitudinem mutasse, ita ejus latitudo manserit eadem, perspicuum est angulum ad polum APa jam non ampliùs tempore inter observationes elapso mensurari, sed angulo ex hoc temporis intervallo deducto mutationem longitudinis vel esse addendam vel demendam, prout navis vel ab occidente in orientem vel ab oriente in occidentem feratur. Hoc autem angulo APa definito, reliqua definientur trigonometricè ut antè, reperieturque tam elevatio poli, quàm vera diei hora tempore utriusque observationis.

§. 105. Sin autem navis interea quoque latitudinem mutaverit, calculus aliquanto fiet difficilior atque ad formulam generalem suprà adhibitam primùm recurramus. Sit tempore primæ observationis elevatio poli $=p$; declinatio solis $=s$, altitudo solis observata $=a$, atque angulus horarius, seu qui verum tempus à meridie ejus loci, ubi terra nunc versatur, indicat, $=x$. Tempore secundæ observationis sit elevatio poli $=p+dp$, declinatio solis $=s+ds$; altitudo solis observata $=a'$, & angulus horarius verum tempus à meridie hujus loci, ubi navis nunc hæret, indicans $=x'$.

§. 106. Sit intervallum temporis harum duarum obſervationum jam more ſolito ad angulum horarium reductum $= v$; hocque tempore navis ſecundùm longitudinem ab occidente in orientem confecerit angulum $= \mu$; ſecundùm latitudinem verò boream versùs acceſſerit per angulum ν, ubi me non monente intelligitur, ſi navis vel in occidentem, vel auſtrum versùs, ſit progreſſa, tum vel $-\mu$ pro μ, vel $-\nu$ pro ν ſcribi oportere. Erit ergo $x' - x = v + \mu$, ideoque $x' = x + v + \mu$; & $dp = \nu$: atque ex formula ſuprà data colligitur, $\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$ & $\cos. x' = \frac{\sin. a' - \sin. (p + dp) \sin. (s + ds)}{\cos. (p + dp) \cos. (s + ds)}$.

§. 107. Ex his quantitatibus cognitæ ſunt s, $s + ds$ declinatio, ſcilicet, ſolis in utraque obſervatione borealis; nam pro auſtrali hi anguli negativè ſunt accipiendi, porrò altitudines a & a' cum intervallo v, atque mutationes longitudinis & latitudinis μ & ν; manentque duæ incognitæ x & p definiendæ, quibus etiam binæ æquationes inventæ ſufficiunt. Poſterior autem æquatio, evolutis differentialibus, dat $\cos. x' = \frac{\sin. a' - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s} + \frac{dp (\sin. a' \sin. p - \sin. s}{\cos. p^2 \cos. s}$, $+ \frac{ds (\sin. a' \sin. s - \sin. p)}{\cos. p \cos. s^2} = \cos. (x + v + \mu)$. Quòd ſi jam hinc p eliminare velimus, ope æquationis $\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$, reperietur quidem æquatio valorem anguli x definiens, ſed opus foret immenſum calculum inde adſtruere.

§. 108. Calculum autem multò faciliùs expedire poterimus, ſi modò azimuthum ſolis in alterutra obſervatione in computum ducamus, quod ſufficit circiter ſaltem noſſe, etiamſi error inde oriundus, ſi opus videatur, facilè corrigi queat. Beneficio autem acûs magneticæ azimutha non adeò ſunt incognita; ut non ad aliquod ſaltem gradus æſtimari queant, quod ad meum propoſitum ſufficit.

Sumto ergo polo P, formetur angulus $APa = v + \mu$, Fig. VIII.
quem vocemus brevitatis gratiâ $= \kappa$, capianturque $PA = 90^\circ - s$, & $Pa = 90^\circ - s - ds$. Hincque in triangulo sphærico APa definietur tertium latus Aa, cum angulis PAa, PaA.

§. 109. Sit porro angulus $ZPA = x$, erit PZH meridianus pro loco solis viso prioris, unde si fiat $PZ = 90^\circ - p$, arcus ZA præbebit complementum altitudinis solis in prima observatione. Deinde cùm sit $ZPa = x + v + \mu$ erit $ZPa = x'$, ideoque circulus $HZPO$ referet quoque meridianum respectu loci solis a in posteriori observatione. Quare si capiatur $Pz = 90^\circ - p - dp$, repræsentabit arcus za complementum altitudinis solis in posteriori observatione: sicque habebitur $ZA = 90^\circ - a$, & $za = 90^\circ - a'$, atque $Zz = dp = r$.

§. 110. Sit jam azimuthum in posteriori observatione, seu angulus $Hza = \theta$, quem proximè saltem cognitum esse pono; & ex Z ad az ducatur perpendiculum Zu, erit $zu = r \cos. \theta$. Concipiatur ductus arcus circuli maximi Za erit $Za = au = 90^\circ - a' - \frac{r}{u} \cos. \theta$, atque ob cognita in triangulo AZa tria latera, invenientur anguli ZAa & ZaA, & ob $Zu = r \sin. \theta$, erit angulus $Zaz = \frac{r \sin. \theta}{\cos. a'}$; ideoque & angulus zaA erit datus.

§. 111. Nunc in triangulo Paz dantur latera $Pa = 90^\circ - s - ds$, $za = 90^\circ - a'$, & angulus $zaP = PaA = zaA$, hincque reperientur primò latus Pz complementum latitudinis navis in posteriori observatione, deinde angulus $aPz = x + v + \mu$, & proinde angulus $APZ = x$, seu tempus verum in utraque observatione. Prætereà verò elicietur angulus Pza, qui si notabiliter discrepare deprehendatur ab assumto azimutho θ, is loco θ jam substituatur, idemque calculus repetatur. Hocque

pacto per merum calculum geometricum, cujus præcepta ubique exstant, hoc problema aliàs difficillimum facilè resolvetur.

§. 112. Problema ergo hoc in navigatione utilissimum; quo ex observatis duabus altitudinibus solis, & tempore interea elapso, hora diei cum elevatione poli quæritur, ita hîc solutum dedi, ut calculus ob ipsius navis motum vix molestior reddatur. Etsi ergo sæpissimè variatio latitudinis Zz tam parva est, ut tutò omitti posset, tamen ejus quoque ratione habitâ calculus non turbatur; quamobrem cùm hæc operatio magis contrahi nequeat ut vulgaribus regulis Trigonometriæ absolvetur, ne exemplo quidem ad ejus illustrationem opus esse judico: atque ad observationes nocturnas, in quibus crepusculares simul sum complexus, progrediar.



VII.

VII.

Determinatio horæ nocturnæ, si elevatio Poli sit data.

§. 113. NOCTU igitur verum tempus ex altitudinibus stellarum, sive fixarum sive inerrantium concludi debet, quarum tam declinationes quàm ascensiones rectas ad quodvis tempus cognitas esse assumo; neque ergo hîc ejusmodi methodis quæ ad observationes stellarum incognitarum sunt accommodatæ, immorabor. Stellæ autem fixæ hoc præ sole gaudent commodo, quòd perpetuò (saltem quamdiu iter navis durat) eandem declinationem conservent: sin autem planetæ adhibeantur, variationis quoque quam in declinatione patiuntur, quoties opus fuerit, ratio erit habenda.

§. 114. Ad manus ergo esse pono catalogum præcipuarum stellarum fixarum, in quo singularum declinationes & ascensiones rectæ ad id tempus, quo navigatio suscipitur, sint expressæ. Præterea verò quoque in promtu esse debent ephemerides planetarum ad præsentem annum computatæ; ex quibus non solùm eorum declinationes & ascensiones rectæ, sed etiam harum rerum variationes diurnæ cognosci queant. Imprimis autem, ut jam notavi, observatorem instructum esse oportet, ephemeridibus solaribus, quoniam omnia tempora ad solem referri solent.

§. 115. Cùm quælibet stella fixa ad eundem meridianum revertatur post $23^h\ 56'\ 4''$, dum sol secundùm motum medium eandem periodum absolvit tempore 24

horarum, si illud temporis intervallum $23^h\ 56'\ 4''$ in 24 partes æquales dividatur, hæ partes horæ sidereæ appellari solent ad distinctionem horarum communium, quæ ex motu solis definiuntur; eritque hora siderea ad horam solarem ut 86164 ad 86400, seu proximè ut 365 ad 366, unde conversio horarum sidearum in solares nihil habebit difficultatis & contrà.

§. 116. Ascensiones rectæ à principio arietis secundùm signorum ordinem numerari solent, unde cujusque stellæ ascensio recta indicat, quanto ea temporis intervallo post initium arietis ad eundem meridianum appellat. Hoc, scilicet, tempus in horis sidereis exprimitur, si quindeni gradus ascensionis rectæ in unam horam computentur: vel si 360° pro $23^h\ 56'\ 4''$ sumatur, prodibit tempus in horis solaribus expressum. Quia porro in ephemeridibus appulsus principii arietis ad meridianum assignari solet, hinc verum tempus quo quævis stella fixa ad meridianum venit, innotescet.

§. 117. Hoc quoque tempus hujusmodi tabulis deficientibus hoc modo colligitur, subtrahatur ascensio recta solis, quam ipsò meridie proximè elapso tenuit, ab ascensione recta stellæ, & residuum in horas sidereas conversum dabit tempus, quo hæc stella per meridianum transiit, in horis sidereis expressum, quas deinde in horas solares mutare convenit. Vel cùm tabulæ habeantur, quæ differentias ascensionum rectarum in horis solaribus exhibeant, & vicissim cujusmodi in *Notitiâ temporum*, quæ Parisiis quot annis edi solet, *pag.* 93 *&* 94, est inserta, ejus ope cujusque stellæ appulsus ad meridianum in horis solaribus statim reperitur; sicque horis sidereis carere poterimus.

§. 118. In ephemeridibus porro ascensio recta solis ad meridiem ejus loci, ad quem sunt computatæ, exhibetur: unde si ejus variatio diurna spectatur, pro quovis alio

meridiano, cujus differentia ab illo constat, ipso meridiei momento ascensio recta solis concludetur. Neque verò ad hoc accuratâ longitudinis cognitione opus est, cùm error 15° in longitudine commissus, in ascensione recta tantum 2′ circiter producat. In navigatione autem vix unquam longitudo loci adeò incerta esse solet, ut ex hoc capite error sit metuendus.

§. 119. Cùm igitur tempus sit cognitum, quo quævis stella fixa ad meridianum ejus loci ubi navis versatur appellet, si ipsum transitum cujuspiam stellæ fixæ per meridianum observare liceret, tum eo momento vera diei hora haberetur, sed jam suprà animadverti observationes transituum per meridianum nimis esse incertas quàm ut eæ ad temporis determinationem adhiberi possent. Interim tamen plurimùm proderit culminationes stellarum seu maximas earum altitudines observare, quia inde ob earum declinationem cognitam elevatio poli certissimè colligi potest. Quod ad modos in hac sectione tradendos eo magis erit necessarium, quia hîc elevationem poli cognitam assumo.

§. 120. Ad verum ergo tempus definiendum stellas eligi oportet, quæ jam à meridiano sunt remotiores; ubi primùm attendendùm est, utrùm ad meridianum accedant, an verò jam versùs occasum inclinent; seu an observatio ante ejus appulsum ad meridianum, an post instituatur. In qua quidem dijudicatione nullus est metuendus error. Deinceps autem fusiùs investigabo, quænam stellæ fixæ, si quidem delectus concedatur, ad hoc institutum sint aptissimæ.

§. 121. Observetur ergo instrumento, quod maximè idoneum videbitur, stellæ cujuspiam fixæ, cujus ascensio recta ac declinatio sit cognita, distantia à zenith ZS quæ sit $= a$. Tum sit elevatio æquatoris, seu distantia poli à Fig. VI.

zenith $PZ = p$, & distantia stellæ à polo $PS = s$ quæ ex ejus declinatione habetur: atque in triangulo sphærico PZS omnia latera erunt cognita, unde si angulus horarius ZPS vocetur $= x$, erit $\cos. x = \frac{\cos. a - \cos. p \cos. s}{\sin. p \sin. s}$.

§. 122. Invento ergo hinc angulo x, instituatur hæc proportio ut $360°$ ad $23^h\, 56'\, 4''$, ita angulus x, ad tempus in horis solaribus expressum, quod tempori, quo eadem stella fixa per meridianum transire fuerit reperta, vel additum vel demtum, prout observatio vel post vel ante stellæ culminationem fuerit instituta, dabit verum tempus solare, tempore observationis.

§. 123. Quo autem in hoc calculo commodiùs logarithmis uti liceat, quæratur semissis anguli x, nam ob $\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}}$, erit $\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\sin. p \sin. s + \cos. p \cos. s - \cos. a}{2 \sin. p \sin. s}}$ $= \sqrt{\frac{\cos. (p - s) - \cos. a}{2 \sin. p \sin. s}}$. At est $\cos. (p - s) - \cos. a = 2 \sin. \frac{p - s + a}{2} \sin. \frac{a - p + s}{2}$, unde erit $\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\sin. \frac{a + p - s}{2} \sin. \frac{a - p + s}{2}}{\sin. p \sin. s}}$.
Hincque commodè per calculum elicietur angulus $\frac{1}{2} x$.

§. 124. Ponamus anno 1743 Maii die 11 vesperi, navem in loco versari, cujus longitudo Parisiis occidentem versùs æstimatur circiter $55°$, & elevatio poli inventa sit $32°\, 24'$, atque stellæ ursæ majoris α signatæ altitudinem observari $51°\, 8'$ post ejus culminationem, quæriturque pro momento observationis verum tempus.

§. 125. Ex ephemeridibus igitur primò reperitur pro meridie diei 11 Maii anno 1743, sub meridiano Parisiensi, ascensio recta solis $47°\, 49'\, 37''$, quæ intervallo unius diei crescit $58'\, 37''$. Quia jam locus navis æstimatur $55°$ occidentalior, dum sol per ejus meridianum transiit, erat ejus ascensio recta major, scilicet $= 47°\, 49'\, 37''$

$+ \frac{55}{360}$ 58′ 37″ = 47° 58′ 34″, ſtellæ autem *α* urſæ majoris invenitur declinatio borealis = 63° 8′ 22″, & aſcenſio recta = 161° 54′ 55″, à qua ſubtrahatur, aſcenſio recta ſolis = 47° 58′ 34″ remanet 113° 56′ 21″ quod in tempus ope tab. *pag.* 93, *Not. temp.* converſum dat 7^h 34′ 29″, ita ut hæc ſtella die propoſito veſperi horâ ſeptimâ 34′ 29″ per meridianum loci, ubi navis eſt tranſierit.

§. 126. His præparatis in triangulo ſphærico *PZS*, erit elevatio æquatoris $PZ = p = 57° 36'$, diſtantia ſtellæ à polo $PS = s = 26° 51' 38''$, & diſtantia ſtellæ à zenith obſervata $ZS = 38° 52' = a$: unde calculus ita adornabitur.

$p = 57° 36' 0''$	$\frac{1}{2}a = 19° 26' 0''$
$s = 26° 51' 40''$	$\frac{p-s}{2} = 15° 22' 10''$
$p - s = 30° 44' 20''$	$\frac{a+p-s}{2} = 34° 48' 10''$
$\frac{p-s}{2} = 15° 22' 10''$	$\frac{a-p+s}{2} = 4° 3' 50''$

log. ſin. $\frac{a+p-s}{2}$ = 9,7564485	Hinc ergo invenitur.
l. ſin. $\frac{a-p+s}{2}$ = 8,8504550	$\frac{1}{2}\chi = 19° 0' 10''$
	$\chi = 38° 0' 20''$
cum quadr. radii = 38,6069035	quod in tempus per tab. 93 alleg. converſum dat :
l. ſin. p = 9,9265112	
l. ſin. s = 9,6549744	30° .... 1^h 59′ 40″
19,5814856	8° .... 31′ 53″
divid. per 2.... 19,0254179	20″ .... 1″
l. ſin. $\frac{1}{2}\chi$ = 9,5127089	Tempus 2^h 31′ 34″

§. 127. Cùm ergo ſtella *α* urſæ majoris ad meridianum appulerit tempore 7^h 34′ 29″, atque obſervatio nunc tardiùs facta fuiſſe inventa ſit 2^h 31′ 34″; ſi hunc numerum ad illum addamus, habebimus verum tempus pro ipſo obſervationis momento, ſcilicet, 10^h 6′ 3″ poſt meridiem

diei 11 Maii. Perſpicuum autem eſt hunc calculum multùm fore ſuccinctiorem, ſi explicationes hîc adjectæ omittantur. Neque etiam opus eſſe arbitror applicationem formulæ datæ oſtendere, ſi vel arcus Ps 90° ſuperet, vel navis in hemiſpherio telluris auſtrali verſetur, quia has circumſtantias eum, qui calculum ſuſcipit probè noſſe oportet.

§. 128. Si in altitudine ſtellæ error quidam fuerit commiſſus, tempus quoque inde concluſum, ſeu angulus x erit erroneus, cujus error facilè reperietur, ſi æquatio $cos. x = \frac{cos. a - cos. p\, cos. s}{sin. p\, sin. s}$ differentietur poſitis x & a variabilibus: unde fiet $dx\, sin. x = \frac{da\, sin. a}{sin. p\, sin. s}$. Hincque $dx = da \frac{sin. a}{sin. p\, sin. s\, sin. x}$. Quare ſi in altitudine error committatur $= da$, inde in angulum horarium x influet error $dx = da \frac{sin. a}{sin. p\, sin. s\, sin. x}$ ſeu poſito $\frac{sin. a}{sin. p\, sin. s\, sin. x} = n$, ſi ſit $da = 5'$, erit $dx = n5'$: hincque in tempore orietur error $20\, n''$.

§. 129. Quò ergo hic error minimè ſit perceptibilis, requiritur primò ut angulus horarius x ſatis ſit notabilis; atque ut ſtella à polo 90 gradibus diſtet, ſeu prope æquatorem ſit ſita: tum verò ut ſtella tam parum à zenith diſtet, quàm prima conditio permittit. Utrique enim ſimul ſatisfieri nequit, quia quò major capitur angulus x, eò major quoque diſtantia ſtellæ à zenith evadet.

§. 130. Videamus ergo in quonam circulo horario data ſtella obſervari debeat, ut coefficiens $n = \frac{sin. a}{sin. p\, sin. s\, sin. x}$, ſeu tantùm fractio $\frac{sin. a}{sin. x}$ fiat minima. Hoc autem evenit ſi $da\, cos. a\, sin. x = dx\, sin. a\, cos. x$. At eſt $dx = \frac{da\, sin. a}{sin. p\, sin. s\, sin. x}$; ergo fit $cos. a = \frac{sin. a^2\, cos. x}{sin. p\, sin. s\, sin. x^2}$, ſeu $cos. a\, sin. p\, sin. s - cos. a\, sin. p\, sin. s\, cos. x^2 = sin. a^2\, cos. x$, ubi ſi valor loco $cos. x$ ſubſti-

tuatur, invenietur $\frac{cos. a}{1+cos. a^2} = \frac{cos. p\, cos. s}{cos. p^2\, cos. s^2}$; hincque duplex valor prodit, vel $cos. a = \frac{cos. p}{cos. s}$, vel $cos. a = \frac{cos. s}{cos. p}$, quorum prior eligendus est si $p > s$, posterior si $p < s$.

§. 131. Sit igitur $cos. a = \frac{cos. p}{cos. s}$, erit $sin. a = \frac{\sqrt{(cos. s^2 - cos. p^2)}}{cos. s}$ & $cos. x = \frac{cos. p\, sin. s}{sin. p\, cos. s}$, atque $sin. x = \frac{\sqrt{(cos. s^2 cos. p^2)}}{sin. p\, cos. s}$, hincque fit $n = \frac{1}{sin. s}$, qui valor fit minimus si $s = 90°$, sed tum fieri nequit $p > s$. Quare propositâ stellâ quâcunque, eam tum observari conveniet, quando fuerit vel $cos. a = \frac{cos. p}{cos. s}$, vel $cos. a = \frac{cos. s}{cos. p}$. Cùm autem stellæ in æquatore sitæ sint aptissimæ, si qua earum eligatur, fiet $s = 90°$, & $n = \frac{sin. a}{sin. p\, sin. x}$; qui valor minor fieri nequit quàm si $sin. x$ sit maximus; quod evenit, si hæc stella prope circulum horarium sextæ horæ observetur; hæcque est tutissima regula ad tempus quàm exactissimè inveniendum.

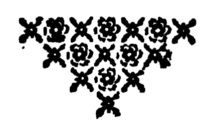
§. 132. Sin autem in altitudine poli fuerimus decepti, videamus cujusmodi observationes instituere oporteat, ut determinatio temporis inde quàm minimè turbetur. In hunc finem differentiemus æquationem $cos. x = \frac{cos. a - cos. p\, cos. s}{sin. p\, sin. s}$, ponendis x & p variabilibus, reperieturque $-dx\, sin. x = \frac{dp\, cos. s}{sin. s} - \frac{dp\, cos. p\, (cos. a - cos. p\, cos. s)}{sin. p^2\, sin. s}$, seu $dx\, sin. x = \frac{dp\, (cos. a\, cos. p - cos. s)}{sin. p^2\, sin. s}$.

§. 133. Manifestum ergo est errorem in tempus hinc redundantem penitùs evanescere, si sit $cos. s = cos. a\, cos. p$, seu $cos. a = \frac{cos. s}{cos. p}$. Quòd si ergo stella in æquatore eligatur, hic error evitatur, si stella in ipso horizonte observetur, quod cùm congruat cum horario sexta horæ pro

hac ſtellâ, quæ conditio antè eſt requiſita, perſpicuum eſt utrique incertitudini optimè occurri, ſi ſtella non longè ab æquatore remota prope horizontem obſervetur.

§. 134. Cùm autem prope horizontem refractiones nimis ſint magnæ, atque rarò ſtellas in hac regione diſtinctè cernere liceat, facilè intelligitur regulam inventam pro circumſtantiis quàm proximè tantùm eſſe obſervandam, & quia fieri nequit $a = 90°$: eligatur ſtella declinationis cujuſdam borealis, verbi gratiâ 15°, & æquatio $cos.\ a = \frac{cos.\ s}{cos.\ p} = \frac{sin.\ 15°}{cos.\ p}$, dabit altitudinem hujus ſtellæ obſervandam, quâ non ſolùm error ex erronea elevatione poli oriundus penitùs tollitur, ſed etiam, qui ex minus accuratâ obſervatione naſcitur, minimus redditur; ſuprà enim §. 129 elicuimus quoque hanc æquationem $cos.\ a = \frac{cos.\ s}{cos.\ p}$.

§. 135. Sub quavis ergo elevatione poli hoc judicium quænam ſtella optimo cum ſucceſſu ad obſervationem eligatur, facilè inſtituitur. Primùm enim diſpiciatur, quà exigua altitudine ſtella diſtinctè obſervari poſſit, cujus altitudinis complementum vocetur $= a$; tum quæratur s, ut ſit $cos.\ s = cos.\ a\ cos.\ p$, & inter ſtellas quæ à zenith intervallo $= a$, remotæ æſtimantur, eligatur una, cujus diſtantia à polo ſit proximè $= s$. Hancque ſtellam diligenter obſervando, dico concluſionem temporis inde deductam quàm minimè à vero eſſe aberraturam. Hoc autem modo quæſtioni propoſitæ ex aſſe ſatisfactum eſſe arbitror.



VIII.

VIII.

Determinatio horæ nocturnæ, si elevatio poli sit incognita.

§. 136. QUANDO elevatio poli est incognita, sicque præter tempus verum quoque ipsam poli elevationem investigare debemus, manifestum est, ad hoc duabus observationibus opus esse, vel ejusdem stellæ vel duarum diversarum; unde in hac sectione mihi duæ quæstiones erunt pertractandæ. Altera, quomodo ex observatis ejusdem stellæ duabus altitudinibus cum tempore interea elapso vera hora inveniri debeat; altera verò quomodo ex observatis duarum stellarum altitudinibus vel simul vel successivè, ita ut intervallum temporis sit cognitum, verum tempus sit definiendum.

§. 137. Quamvis hæc problemata insignem habeant utilitatem, tamen iis carere possemus, cùm ipsa poli elevatio non difficulter tam crasso modo uti in sectione præcedente assumsimus, æstimari queat, atque ad id vix opus sit instrumentis. Deinde etiam putaverim nunquam intermittendas esse observationes, ex quibus elevatio poli concludi possit, sicque vix evenire poterit ut quoties stellæ sint conspicuæ, elevatio poli sit ignota; nisi fortè post longam turbidam tempestatem nubes dissipare incipiant, stellasque aliquot transmittant, quo casu neque elevatio poli cognita, neque si satis accuratè æstimari posset, delectus stellarum ad observandum permitteretur.

§. 138. Quod igitur ad prius problema attinet, quo eadem stella bis interjecto quodam temporis intervallo

cognito observatur, solutio omninò similis erit ei, quam suprà pro determinatione temporis ex duabus altitudinibus solis successivè observatis tradidi. Quamquam hoc problema casu antè allato, quo cœlum plerumque nubibus est velatum, nullum usum habere potest, propterea quod ignoramus, quamnam stellam post aliquot tempus iterùm simus visuri. Tum verò hic modus nimis prolixum calculum requirit, ut equidem mallem alio modo uti, dummodo liceret. Interim tamen solutionem hujus problematis, ne ullam quæstionis partem prætermisisse videar, breviter exponam.

§. 139. Primùm igitur stella observata vel erit fixa, vel planeta; priori casu ejus ascensio recta, & declinatio manebit invariata; posteriori verò inquirendum est, quantùm utraque intervallo temporis inter observationes elapsi sit mutata, quod ex ephemeridibus facilè colligitur. Deinde etiam ex æstimatione itineris dispiciendum est, quantùm navis tam longitudo quàm latitudo interea immutetur. Investigetur porro verum temporis momentum, quo stella per meridianum alterius loci, quo navis tempore alterutrius observationis est versata, transeat, unde simul ex variatione longitudinis navis & ascensionis rectæ stellæ, si fuerit planeta, verum culminationis tempus sub altero meridiano patebit.

§. 140. His præparatis, sit *AP* distantia stellæ à polo in
Fig. VIII. prima observatione, *aP* in altera: ac definiatur angulus *APa* rite, tam ex intervallo temporis, quàm ex mutationibus ascensionis rectæ, si stella fuerit planeta, & longitudinis navis, scilicet, tempus inter observationes elapsum convertatur in angulum per *pag. 94* Notitiæ temporum Parisinæ. Ab eo vel subtrahatur, vel addatur variatio ascensionis rectæ, prout ea interea vel crescat vel decrescat. Mutatio autem longitudinis navis addatur, si cursus in

orientem sit directus, contra verò subtrahatur, hocque modo habebitur verus angulus ad polum APa.

§. 141. Per puncta A & a ductus concipiatur arcus circuli maximi Aa, & in triangulo sphærico APa, ex datis lateribus AP, aP, cum angulo intercepto APa, quærantur anguli PAa, PaA cum latere Aa. Deinde sit APZ angulus verus horarius pro tempore primæ observationis, eritque aPZ angulus horarius pro tempore secundæ observationis quæ ad eundem meridianum $HZPO$ sit perducta, dum variatio longitudinis jam in angulo APa est inclusa, superest ergo ut positio hujus meridiani $HZPO$ respectu arcuum AP & aP definiatur.

§. 142. Capiatur PZ æqualis complemento elevationis poli in prima observatione, & Pz complemento elevationis poli in observatione altera, etsi utraque est incognita; quo facto erit arcus ZA distantia stellæ à zenith in prima observatione, & za in altera; ideoque utraque per observationes dantur. Erit ergo Zz variatio latitudinis, quam navis interea subiit, ideoque cognita, quæ plerumque valdè erit parva & pro nihilo haberi poterit. Primò autem hoc intervallum reverâ rejiciam, quo calculus faciliùs institui queat, & deinceps in errorem inde oriundum inquiram.

§. 143. Incidat ergo z in Z, ut sit $Za = za$, & quia in triangulo AZa dantur singula latera, AZ, aZ & Aa, hinc colligentur anguli ZAa, ZaA, & quia jam antè inventi sunt anguli PAa, PaA, hinc innotescent anguli ZAP, ZaP, unde in utroque triangulo ZAP, ZaP tres res erunt cognitæ; sufficiet autem alterum ZaP evolvisse, in quo ob data latera aZ, aP cum angulo ZaP reperientur, 1. Latus PZ, complementum elevationis poli. 2. Angulus aPZ, ex eoque angulus APZ. Et 3. angulus azimuthalis PZa,

§. 144. Quod si jam variatio latitudinis Zz alicujus momenti esse videatur, quia invenimus angulum PZa, ei proximè æqualis erit angulus Pza; sufficit autem hunc angulum propemodum tantùm nosse. Ex Z ad za demittatur perpendiculum Zu, positoque angulo $Zzu = \theta$, erit $zu = Zz\ cos.\ \theta$: quo ablato ab aZ remanebit au, cui aZ est æqualis. Jam posito hoc valore aZ loco ejus, quo antè sum usus, calculus in §. præced. præscriptus repetatur, ut tam vera elevatio poli ex PZ & tempus quæsitum ex angulo APZ vel aPZ concludi queat.

§. 145. Angulus, scilicet, APZ hoc modo inventus in tempus convertatur per tab. *p*, 93, Not. temp. hocque tempus ad tempus culminationis stellæ sub meridiano primæ observationis addatur, vel ab eo subtrahatur, prout observatio vel post, vel ante ejus culminationem fuerit instituta, sicque habebitur tempus verum solare pro momento primæ observationis; unde facilè angulum APa similiter in tempus convertendo, deducetur verum tempus pro momento posterioris observationis.

§. 146. Patet ergo hoc problema, quod si calculo analytico aggredi velimus, in intricatissimos calculos nos seduceret, sine ulla difficultate, per sola præcepta Trigonometriæ solvi posse, neque solutionem variationibus tam ascensionis rectæ & declinationis stellæ, quàm longitudinis ac latitudinis navis; quæ res alioquin calculum summoperè impedire videantur, quicquam perturbari, ita ut in hoc negotio major calculi sublevatio exspectari quidem possit.

§. 147. Alterum problema, quo tempus ex duabus observationibus duarum stellarum vel simul vel successivè factatum determinare jubemur, maximam sæpe utilitatem habere videtur, quando inter nubes tantùm hinc inde stellæ transparent, tum enim, vel simul vel successivè

duarum ſtellarum altitudines obſervari poterunt, dum fortè eadem ſtella non ampliùs denuò ſe ſpectandam offerat, neque propterea priori problemati locus concedatur. Commodo autem uſu venit, ut ſolutio hujus problematis non difficilior evadat quàm præcedentis.

§. 148. Excerptis ergo duarum ſtellarum, quas obſervamus tàm aſcenſionibus rectis, quàm declinationibus, definiantur earum tempora culminationis, pro meridiano ſub quo navis tum verſatur, atque ſi intervallum obſervationum ſatis ſit notabile, ſimul variationis longitudinis, quæ in mari evenerit, ratio habeatur, quemadmodum ſuprà eſt præceptum, ſimul verò in utraque obſervatione notetur, utrùm ante an poſt culminationem inſtituatur.

§. 149. Si ambæ obſervationes eodem momento inſtituantur, tum differentia aſcenſionum rectarum dabit angulum ad polum *APB*, ſin autem ab obſervatione ſtellæ *A*, ad obſervationem ſtellæ *B*, tempus quoddam ſit præterlapſum, tum id in angulum convertatur, iſque ad angulum antè inventum *APB* ſuperaddatur, ſimulque variationis longitudinis navis intereà factæ ratio haberi poterit, quæ ad illum angulum addatur, ſi navis orientem versùs feratur, contrà verò ab eo ſubtrahatur. *Fig. IX.*

§. 150. Cùm hoc pacto vera quantitas anguli ad polum *APB* fuerit definita, ſumatur arcus *AP* æqualis diſtantiæ *prioris* ſtellæ à polo, & *PB* æqualis diſtantiæ poſterioris ſtellæ à polo, ducaturque arcus circuli maximi *AB*; atque in triangulo ſphærico *APB*, ex datis lateribus *AP* & *BP* cum angulo intercepto *APB*, ſupputentur anguli *PAB*, *PBA*, cum latere *AB*.

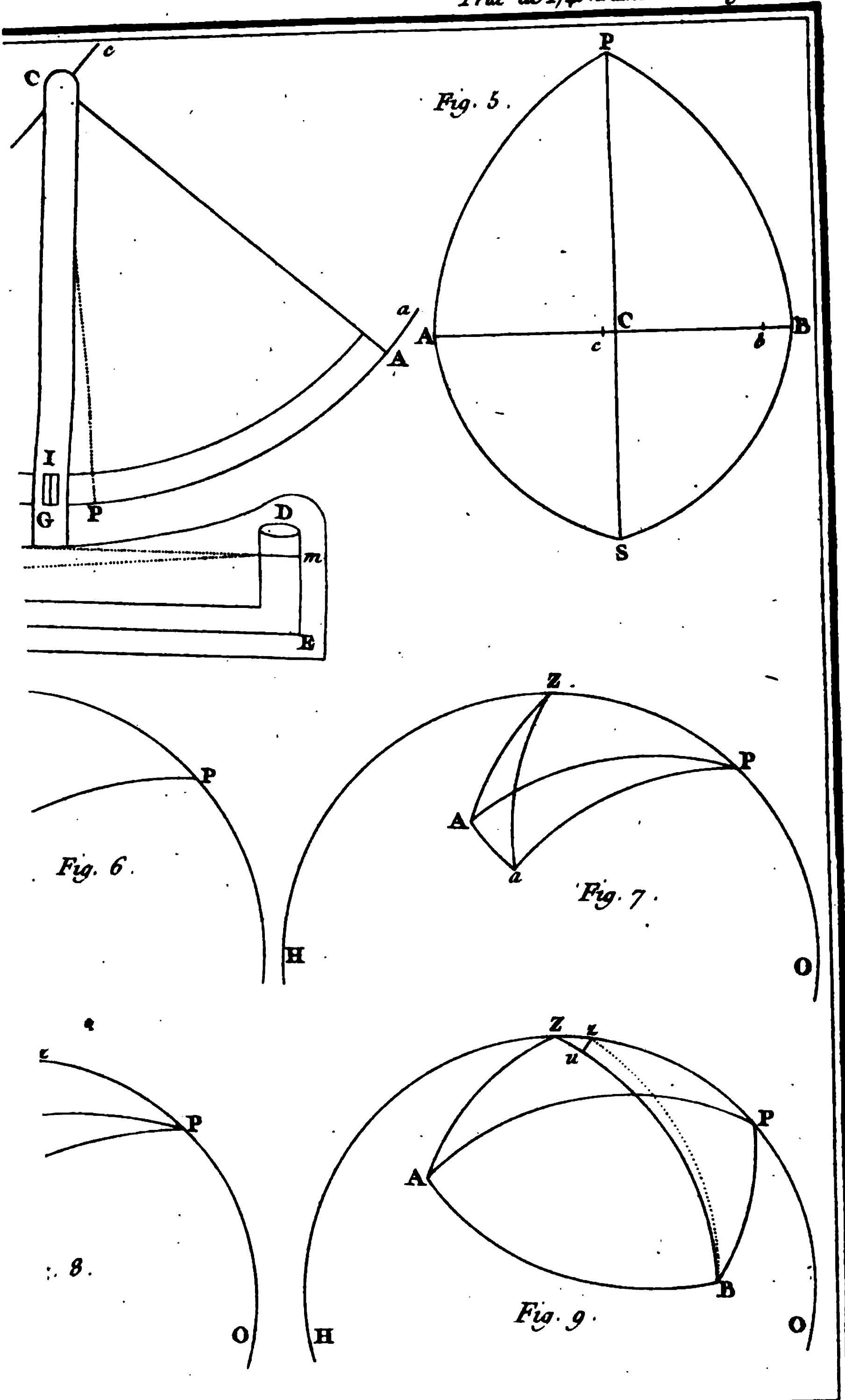
§. 151. Deinde ductus concipiatur meridianus *HZPO* utrique obſervationi communis ſive ambæ ſimul ſint factæ, ſive interjecto quodam tempore, quod fieri poſſe ſuprà jam eſt oſtenſum: ſitque *ZP* complementum elevationis

poli pro priori obſervatione, zP verò pro poſteriori; ſiquidem latitudo navis inter obſervationes variationem quandam fuerit paſſa. Primâ tamen calculi operatione hoc diſcrimen Zz negligatur; ita ut arcus ZA & ZB repreſentent complementa altitudinum ſtellarum obſervatarum.

§. 152. In triangulo ergo ſphærico AZB cùm data ſint tria latera AB, AZ & BZ, computentur anguli ZAB, ZBA; hincque colligantur anguli ZAP & ZBP, quo facto vel in triangulo ZBP, latera ZB, PB, cum angulo ZBP: unde porrò complementum elevationis poli PZ cum angulis horariis ZPA & ZPB invenientur, ex quibus vera tempora obſervationum rectè concludentur; ſiquidem variatio latitudinis navis, quæ per Zz, exprimitur nullius fuerit momenti, ut plerumque fit, fierique præſtat cum una obſervatione abſoluta nihil obſtat, quo minus ſtatim alteram ſuſcipiamus.

§. 153. Sin tamen nihilominus tempus quoddam notabile inter tempora obſervationum præterfluxerit, atque variatio latitudinis Zz interea facta ſine errore negligi nequeat, tum ſaltem ſuperior calculus azimuthum PZB ſatis prope indicabit, & cùm jam arcus ZB veram diſtantiam ſtellæ B à zenith exhibeat, demiſſo perpendiculo zu, definiri poterit particula Zu, quæ ſecundùm figuram ad ZB addita, dabit veram longitudinem arcùs ZB, quâ in ſuperiori calculo jam repetendo pro ZB uti oportebit.

§. 154. Si igitur ex tribus lateribus trianguli AZB denuò angulus ZAB determinetur, ab eoque angulus PAB ſubtrahatur, ſiquidem figura ad caſum propoſitum ſit accommodata, remanebit angulus ZAP, ex quo & arcubus ZA, PA, reperietur cùm vera quantitas PZ arcus, tùm angulus horarius ZPA, qui debito modo in tempus converſus indicabit quanto tempore obſervatio ſtellæ A vel ante, vel poſt ejus culminationem ſit facta,



C
c
a
A
I
G
P
D
m
E
Fig. 5.
P
A
C
c
b
B
S
Fig. 6.
P
H
Z
P
A
a
Fig. 7.
O
P
8.
O
H
Z
z
u
P
A
B
Fig. 9.
O

§. 155. Supereſſet ut quoque de ſelectione ſtellarum ad certitudinem obſervationum maximè idonearum plura adjicerem; ſed quoniam ſi cœlum eſt ſerenum, & delectus conceditur, methodis in ſuperiori ſectione traditis potiùs uti conveniet; pauca tantùm annotabo, quæ ex præceptis ſuprà traditis facilè conſequuntur. Primùm ergo ad hoc ſtellas non procul ſupra horizontem elevatas eligi debere perſpicuum eſt, quæ declinationem habeant borealem, ſed exiguam; ſiquidem navis in hemiſphærio boreali verſetur. Deinde concluſio erit eo certior quò magis ſtellæ in aſcenſione recta diſcrepent. Quamobrem tutiſſimum conſilium erit, ut altera ſtella prope horizontem orientem, altera prope occidentem eligatur.



DE

DE LA MEILLEURE MANIERE

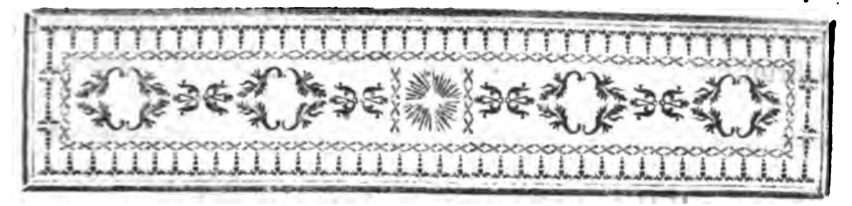
DE TROUVER L'HEURE EN MER,

PAR OBSERVATION;

Soit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout dans la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.

Nihil unquàm invenietur, ſi contenti fuerimus inventis. Sen. *Ep.* LXIV.

Prix. 1745. Y



DE LA MEILLEURE MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER, PAR OBSERVATION,

Soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & surtout dans la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

Nihil unquàm invenietur, si contenti fuerimus inventis. Sen. Ep. LXIV.



ON peut trouver l'heure en mer par l'observation de la hauteur, ou de l'azimuth, ou de différentes hauteurs, ou de différens azimuths d'un astre ou de plusieurs astres, ou enfin par l'observation de la même hauteur ou du même azimuth de plusieurs astres, ou du même astre. Les Cadrans mobiles, les Anneaux Astronomiques & autres instrumens, se rapportent à ces sortes d'observations.

Ainsi nous diviserons cette Dissertation en trois Parties. Dans la premiere, nous examinerons les instrumens les plus propres à ces observations. Dans la seconde, nous choisirons parmi les différens usages de ces instrumens, ceux qui nous paroîtront plus sûrs & plus faciles pour trouver l'heure en mer, surtout pendant la nuit. Et dans

la troisieme, nous verrons en quelle rencontre l'erreur des instrumens influe moins sur la détermination de l'heure.

PREMIERE PARTIE.

Examen des Instrumens les plus propres à observer en Mer la hauteur ou l'azimuth des Astres.

§. 1. TOUT le monde sçait que parmi les instrumens à prendre hauteur, on ne peut se servir la nuit à la mer, quand on ne voit pas l'horison, que de ceux qui portent leur horison avec eux, & que même ceux qui sont à pinnules, comme l'Astrolabe marin, ne sont pas propres à observer la hauteur des étoiles, parce qu'il est presque impossible de viser exactement à une étoile par une pinnule percée d'un très-petit trou, pendant que l'instrument & le navire sont dans l'agitation. Mais je crois qu'on peut corriger, ou du moins diminuer beaucoup ce défaut, en substituant à la pinnule inférieure de l'Astrolabe marin, un miroir de métail, perpendiculaire au plan de l'instrument, & qui forme avec la ligne de foi de l'alidade, un angle de 45 degrés, en sorte que l'alidade qui porte la pinnule & le miroir, ait toutes ses parties en équilibre autour du centre de l'instrument, qui doit être son centre de gravité. On peut, au lieu de la pinnule supérieure, placer une lunette.

Fig. I. En effet, soit l'Astrolabe marin *THNO*; sa ligne horisontale *HO*, & sa ligne verticale *TN*. Imaginons la pinnule ou la lunette au point *T*, & le miroir au point *N*, placé parallelement à la ligne *MI*, laquelle fait un angle

TCI ou *ICO*, de 45° avec la ligne de foy *TC*, ou avec l'horisontale *HO*; il faut tracer au point *N*, sur le miroir, une droite perpendiculaire au plan de l'instrument. Il est clair que si un astre est dans une ligne *hN* parallele à *HO*, l'œil en *T* le verra par réflexion, dans le point *N* du miroir, ou plutôt dans la direction *TN*; parce que l'angle d'incidence *hNμ* ou *HCM* est égal à l'angle de réflexion *TNJ*, ou *TCI*, tous ces angles étant chacun de 45°. Donc si l'alidade *TC* descend vers *t* d'un nombre quelconque (*n*) de degrés, le point *I* de la ligne *MI*, ou le point *J* du miroir *μNJ*, descendant de même vers *i*, & *M* montant vers *m* d'autant de degrés; un astre *S* placé au même nombre *n* de degrés de hauteur, paroîtra dans le centre *N* du miroir, & la ligne de foi *Ct*, marquera *n* degrés au point *t*. Car l'angle d'incidence $SCm = SCH + HCM\,(45^\circ) - MCm\,(n) =$ l'angle de réflexion $tCi = TCI\,(45^\circ) + ICi\,(n) - TCt\,(n)$. Donc $SCH = n$; donc l'astre *S* sera réfléchi vers *t* par la ligne *Ct*, & l'arc *Tt* marquera sa hauteur.

Ou plus brievement, il est évident, que l'angle formé par les deux rayons, l'un d'incidence, & l'autre de réflexion, est toûjours droit, puisque l'angle de réflexion & celui d'incidence sont chacun de 45 degrés. Donc l'astre doit être élevé au-dessus de l'horison de la même quantité de degrés, que l'alidade est descendue au-dessus du zénith.

On peut vérifier cet instrument, en visant à un point connu, ou à l'horison. Car l'erreur de cet Astrolabe ne peut venir que de ce que le miroir *μNJ* ne fait pas avec l'alidade un angle de 45°, ou de ce que la ligne *TCN*, perpendiculaire à *HO*, n'est pas exactement verticale.

Or, dans le premier cas, en visant à un point horisontal *h*, on verra que l'alidade s'écarte du point *T*, & l'on

corrigera l'erreur de l'inſtrument, en faiſant tourner le miroir autour du point N, & le fixant en ſorte que l'alidade étant placée au point T, qui eſt marqué zero, l'objet paroiſſe dans la ligne horiſontale du miroir ou de la lunette. Mais dans le ſecond cas, ſuppoſons que la verticale ſoit θCn, éloignée de TN d'un nombre quelconque (e) de degrés : ſi le miroir fait un angle de 45° avec la ligne de foi, il faudra néceſſairement placer l'alidade dans la ligne θCn, pour découvrir un objet placé dans la ligne nN, parallele à la vraie horiſontale KCO, & perpendiculaire à θn. Donc l'erreur de l'inſtrument ſera l'arc $T\theta$: mais pour corriger cette erreur, il faudra encore tourner le miroir comme dans le premier cas, enſorte que l'alidade étant placée au point T, l'objet paroiſſe dans la ligne horiſontale du miroir, ou de la lunette ; alors le miroir fera avec TN un angle de $45° + \frac{1}{2} hNn$, ou $45° + \frac{1}{2} HK$, & l'inſtrument donnera toûjours la hauteur exacte ; car dans cette ſituation, ſi un aſtre eſt dans la ligne horiſontale Nn ou CK, l'angle d'incidence $nNV = CNu$, ſera $= 45° + \frac{1}{2} hNn$, parce que l'angle nNC étant moindre qu'un angle droit de la quantité hNn, les angles égaux d'incidence & de réflexion, qui forment le ſupplément de cet angle nNC à 180°, doivent augmenter chacun de $\frac{1}{2} hNn$. Donc ſi l'alidade deſcend vers t d'un nombre quelconque n de degrés, le point u du miroir deſcendant de même, un aſtre S placé au même nombre n de degrés de hauteur ſur l'horiſon, paroîtra dans le miroir au même point, & l'alidade marquera le même nombre de degrés au point t. En effet, par le même raiſonnement que ci-devant, en ſuppoſant TI de $45° + \frac{1}{2} hNn$, on aura $Sm = SK + HK + HM$ ($= ICO = 45° - \frac{1}{2} HK$) $- Mm$ (n), (l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion) $= ti = TI$ ($45° + \frac{1}{2} HK$)

$+ Ii(n) - Tt(n)$. Donc $SK - n = o$, ou $SK = n$, ce qu'il falloit démontrer. De-là il ſuit que l'angle CNJ ne doit être de 45°, que dans le cas où la ligne TN eſt exactement verticale, & que les hauteurs ſeront toûjours exactes, lorſqu'on fixera le miroir, en ſorte que l'alidade étant placée à zero, l'objet horiſontal paroiſſe dans la ligne horiſontale tracée ſur le miroir, ou dans le fil horiſontal de la lunette.

On ſçait que le miroir renverſe les objets, & que la lunette les redreſſe, ſi elle n'a que deux verres convexes, & que pour prendre hauteur au Soleil, on a beſoin d'un verre obſcurci, placé devant le miroir, tel que celui qu'on voit dans les Octans Anglois à double réflexion.

Pendant la nuit on a beſoin d'une lumiere pour éclairer les fils de la lunette, à moins qu'on ne mette au lieu du fil une petite lame de cuivre.

Si l'on ſe ſert d'une pinnule, on peut tracer ſur le miroir, ou ſur ſon bord parallele au plan de l'inſtrument, une ligne droite, qu'on diviſera en degrés & minutes, pour voir tout-à-coup, ſans toucher à l'alidade, la minute où ſe trouve l'aſtre. En voici la méthode.

Soit TC la ligne de foi de l'alidade; ACB la ligne du miroir parallele au plan de l'inſtrument. Décrivez du centre T où eſt la pinnule, un arc-de-cercle DEF, que vous diviſerez en degrés & minutes, par des lignes menées de ce centre, comme TDG. Si l'arc DE eſt d'un degré, la ligne GC marquera un degré de diminution ou d'augmentation, & ainſi des autres, de part & d'autre du point C. En effet, ſoit AB le miroir, TC l'alidade, HO, ho deux lignes horiſontales qui paſſent par les points C & G; ſoit l'aſtre E inférieur à l'aſtre S, la hauteur EGh de l'aſtre E, ſera $= EGA + AGh =$ (à cauſe des paralleles HO, ho, & de l'angle d'incidence $TGC = EGA$) TGC

Fig. II.

Fig. III.

$+ ACH =$ (à cauſe de l'angle extérieur $TCB = TGC + GTC$, ou $TGC = TCB$ ou $SCA - GTC$) $SCA - GTC + ACH = SCH - GTC$. Donc GTC eſt la diminution de la hauteur SCH pour l'étoile E.

Si l'on ſe ſert d'une lunette, on pourra faire la même choſe plus exactement avec un micrometre.

Cet inſtrument a cet avantage ſur l'Octant à double réflexion de M. Hadley, & ſur celui de Caleb Smith, à ſimple réflexion, que les erreurs de la diviſon n'y ſont pas doublées comme dans ceux-ci. On peut cependant ſe ſervir de l'un de ces deux Octans Anglois, en les rendant plus peſans, & prolongeant l'alidade pour conſerver l'équilibre.

L'alidade ſe mouvant aiſément dans tous ces inſtrumens, on peut la fixer à la hauteur prévûe, ſurtout lorſqu'on cherche l'heure, & attendre le paſſage de l'aſtre à cette hauteur.

A l'égard des miroirs, ceux de verre ne peuvent pas ſervir aux étoiles, à moins qu'ils ne ſoient parfaitement plans, & d'une épaiſſeur égale par-tout, ce qui ne ſe trouve preſque jamais. C'eſt pour cela qu'on emploie les miroirs de métal dans pluſieurs Octans Anglois; car ces miroirs étant bien polis, repréſentent les étoiles auſſi clairement que les Téleſcopes de réflexion, au lieu que les miroirs ordinaires de verre les repréſentent très- confuſément.

§. 2. Ce que l'on vient de dire, prouve qu'on peut aujourd'hui obſerver la hauteur des étoiles ſur un navire, beaucoup mieux qu'on ne le pouvoit avant l'invention des Octans à miroir: mais la plus grande difficulté, qui eſt la ſuſpenſion des inſtrumens à plomb, ſubſiſte encore, & il eſt queſtion de la vaincre, ou au moins de la diminuer autant qu'il eſt poſſible.

M. Jean

M. Jean Bernoulli, dans le Recueil de ses Ouvrages, imprimé en 1742, *Art.* 177, *tom.* IV, *p.* 269 & 274, fait voir, que si un corps d'une figure quelconque *DFEG* étant en repos, ayant son centre de gravité *C*, est frappé au point *D* selon la direction horisontale *DAE*, il aura deux mouvemens angulaires uniformes en même tems, l'un autour du centre de gravité *C*, pendant que ce centre se meut d'un mouvement uniforme, suivant une direction parallele à *AE*, & l'autre autour du centre de rotation *B*, qui se meut d'un mouvement uniforme sur la cycloïde ordinaire, dont le rayon est *BC*, pendant que ce cercle roule sur la droite *BP* parallele à *AE*, & il démontre que le centre de rotation *B*, n'est pas différent du centre de suspension d'un pendule dont *A* seroit le centre d'oscillation ou de percussion, & comme par la démonstration d'Hugens, les pendules composés ont cette propriété, qu'on peut changer le point de suspension en centre d'oscillation; il suit de-là qu'on peut prendre le corps *DFEG*, pour un pendule composé, qui fait ses vibrations autour du point de suspension *A*, & dont le centre d'oscillation est *B*. Ce mouvement de rotation est plus lent ou plus promt, selon que la direction *AE* est plus près ou plus loin du centre de gravité *C*. Si l'on considere la cycloïde d'Hugens décrite par le point *B*, & si l'on prend le corps *EFDG* pour un cercle homogene, dont le centre est *C*, & le rayon $= r$, on prendra, selon la regle d'Hugens, $\frac{2}{5}$ de la troisieme proportionnelle à *CB* & *r*, pour avoir *CA*, ce qui donne $CA = \frac{2}{5} \frac{rr}{CB}$, & par conséquent $CB = \frac{2}{5} \frac{rr}{CA}$. Tout cela suit des principes de M. Bernoulli; donc la distance *CB* croît en raison composée de la raison directe doublée du rayon *r* du corps, & de la raison inverse simple de la distance *CA*. Donc plus le point *A* de suspension

Fig. IV.

Horol. Oscil. fol. 142.

ſera proche du centre de gravité de l'inſtrument, & moins il ſera expoſé à tourner autour de *B*, le point *B* étant éloigné à proportion ; & plus le corps ſera peſant ou ſolide, moins il ſera expoſé à tourner autour de *B* ; puiſque le quarré *rr* du rayon en ſera plus grand, & par conſéquent le point *B* plus éloigné. Donc ſi le point *A* de ſuſpenſion eſt fort près du centre de gravité *C*, ce point *A* étant frappé par le mouvement d'un navire, le centre de rotation *B* ſera fort éloigné de *C*, ſurtout ſi l'inſtrument a beaucoup de peſanteur, laquelle eſt toûjours proportionnelle à *rr*, dans les cercles de même épaiſſeur. Donc le mouvement horiſontal de *CBF*, &c. ſera preſque égal à celui de *A*, d'autant plus que le point fixe *A* réſiſte au mouvement de la peſanteur.

Il faut donc tâcher de ſuſpendre les inſtrumens à plomb, par un point *A*, qui ſoit fort peu au-deſſus de leur centre de gravité, & leur donner beaucoup de peſanteur, afin qu'ils aient fort peu de rotation. Le meilleur moyen pour cela, & en même tems le plus ſimple, eſt la ſuſpenſion des bouſſoles en cette maniere.

Dans les bouſſoles ordinaires, ou compas de variation, *Fig. V.* le chaſſis *HIKL* eſt appuyé ſur deux pivots *M* & *N*, & la boëte intérieure de la bouſſole eſt appuyée ſur deux points oppoſés *E* & *D* des côtés *HL*, *IK* du chaſſis. Les pinnules & le fil horiſontal ſont dans le diametre *ED*, de ſorte que les points *M* & *N* du chaſſis étant ſeuls fixes, le mouvement ſe fait toûjours autour de l'axe *MN*, parce que la boëte de la bouſſole ne peut avoir, par cette ſuſpenſion, que deux mouvemens circulaires, l'un autour de l'axe *ED*, & l'autre autour de l'axe *MN* : mais l'axe *ED* étant mobile autour de l'axe fixe *MN*, le mouvement circulaire fait néceſſairement une impreſſion ſur cet axe, & le force à tourner dans très-peu de tems autour de

l'axe fixe MN. De-là vient que les pinnules E & D sont toûjours à fort peu près dans le même azimuth; & c'est-là le plus grand avantage de la suspension des boussoles. Pour profiter de cet avantage dans le cas présent, il faut donner à l'Anneau Astronomique, ou à l'Astrolabe marin, une situation toute différente, & le placer dans la direction MN, en sorte qu'il soit traversé par un axe fixe ED, & que cet axe soit appuyé sur le chassis aux points E & D, où l'on appuie les pivots des boussoles. Ce chassis roulera sur les points fixes M & N; & par ce moyen, l'instrument étant dans l'azimuth MN, ne pourra plus rouler autour de son axe ED, & ne roulant qu'autour de MN par des vibrations qui le feront incliner vers E ou vers D, l'erreur dans la hauteur des astres sera très-petite. On pourra même l'éviter, en choisissant la plus petite hauteur de toutes celles que l'instrument pourra donner dans ses différentes inclinaisons. Car soit S le Soleil; CH, Ch, deux différentes lignes horisontales, dont l'une CH, soit dans le vrai azimuth du Soleil. Il est clair que l'angle SCH sera toûjours plus petit qu'aucun des autres SCh; puisque les côtés SC, CH, & SC, Ch étant égaux, la distance SH perpendiculaire à l'horison, est toûjours plus petite que la distance oblique Sh. Ainsi l'erreur produite dans la hauteur, sera l'excès de l'angle oblique SCh sur l'angle de la vraie hauteur SCH. Pour trouver cet excès, l'inclinaison ShH étant donnée, on calculera le triangle sphérique SHh rectangle en H. Soit le sinus de l'angle d'inclinaison $ShH = i$, le sinus total $= r$, & le sinus de la hauteur $SH = h$; nous aurons $i : r :: h :$ au sinus de $Sh = \frac{rh}{i}$, & la différence entre l'angle d'inclinaison erronée ShH, & l'angle droit SHh étant l'erreur de l'inclinaison, & en même tems le complément de cet angle d'inclinaison,

Fig. VI.

nommant e le ſinus de cette erreur, nous aurons le ſinus de $Sh = \frac{rh}{\sqrt{rree}}$, puiſque $i = \sqrt{rree}$. De ſorte que ſi cet écart eſt, par exemple, de 10°, on trouvera le ſinus de $Sh' = \frac{10000h}{9848}$, ou $\frac{1250}{1231}h$; ce qui n'eſt pas une grande erreur, puiſque dans un ſi grand écart de 10°, le ſinus de la fauſſe hauteur ne ſurpaſſeroit le ſinus de la véritable, que de $\frac{19}{1231}$, ou à fort peu près $\frac{1}{65}$. Cependant cet écart produiroit une erreur conſidérable dans les grandes hauteurs; car la véritable hauteur étant de 76°, & ſon ſinus 97029,57', on trouveroit que pour un écart de 10° d'inclinaiſon, la fauſſe hauteur ſeroit de 80° 9'; & ainſi l'erreur ſeroit de 4° 9'. Mais ſi la vraie hauteur étoit de 10° 30', ſon ſinus 18223, 55 donneroit dans la même hypotheſe, le ſinus de la fauſſe hauteur 18504, laquelle ſeroit 10° 40', & l'erreur ne ſeroit que de 10'; ce qui eſt bien peu pour 10° d'inclinaiſon. D'ailleurs on s'apperçoit aiſément d'une ſi grande inclinaiſon, & l'on ne riſque preſque rien en prenant la plus petite hauteur dans les différentes inclinaiſons, puiſque la vraie hauteur SH eſt toûjours *la plus petite de toutes*.

On voit que cette méthode réunit tous les avantages qu'on peut eſpérer de la ſuſpenſion d'un inſtrument à prendre hauteur. Car 1° l'inſtrument étant ſuſpendu par ce moyen en E & D, un peu au-deſſus de ſon centre de gravité, ne roulera preſque plus autour du centre d'oſcillation, qui ſera très-éloigné du point de ſuſpenſion. 2°. Etant ſuſpendu comme la bouſſole, de maniere qu'il ne puiſſe pas rouler autour de ſon axe, mais ſeulement autour de ſon diametre horiſontal, il ne pourra s'écarter que très-peu de la vraie hauteur, comme on vient de le voir. 3°. Le poids de l'inſtrument étant fort grand, on en ſera d'autant plus aſſûré de la vraie hauteur.

Fig. V.

Pour perfectionner cette ſuſpenſion, on peût placer un niveau d'air ſur l'axe *MN*, & l'on verra que la bulle d'air reſtera toûjours au milieu du niveau, pendant que l'inſtrument ne tournera qu'autour de l'axe *MN*; mais il faut que ce niveau ſoit exactement dans la direction de cet axe. On peut ajoûter un autre niveau d'air perpendiculaire à celui-ci, & exactement dans l'axe *ED*, pour pouvoir prendre la hauteur au moment que la bulle d'air ſera au milieu, & pour éviter par ce moyen, autant qu'il eſt poſſible, l'erreur que l'inclinaiſon de l'inſtrument peut produire.

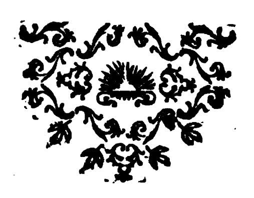
§. 3. Le Compas azimuthal, que les Anglois ont imaginé pour obſerver l'azimuth des aſtres, eſt préférable au compas ordinaire de variation, par la grandeur de ſes degrés, & par la hauteur de ſa pinnule; mais il a un très-grand défaut, qui ne ſe trouve pas dans les compas ordinaires de variation. Car dans ceux-ci, la boëte qui porte la roſe des vents étant appuyée ſur les points *E* & *D* du chaſſis *HIKL*, & ce chaſſis roulant avec cette boëte autour des pivots fixes *M* & *N*, il arrive que le mouvement *ſe fait toûjours* autour de l'axe *MN*, comme on l'a déja remarqué, & que par conſéquent les pinnules étant fixées en *E* & *D*, l'azimuth qui répond à *ED* reſte toûjours le même, malgré l'agitation de l'inſtrument, qui n'incline jamais vers *M* ni vers *N*, ou dont le mouvement ſe réduit promptement aux vibrations ſeules autour de *MN*, comme l'expérience & la raiſon le démontrent; ce dernier mouvement l'emportant toûjours ſur le premier : au contraire l'alidade du compas azimuthal Anglois roulant autour du point *D*, ſe trouvera ſouvent placée dans une ſituation telle que *DG*, éloignée de *DE*, & l'inſtrument roulant toûjours autour de *MN*, l'azimuth qui répond à *DG* variera ſans ceſſe. Les Auteurs qui ont fait un ſi grand éloge de cet inſtrument, n'ont pas ſans doute apperçû ce

défaut, qui rend inutile la grandeur de la graduation & la hauteur de la pinnule.

Mais pour rendre le compas ordinaire de variation propre à obſerver l'azimuth de l'aſtre, il faut placer un fil de laiton au-deſſus de l'une des pinnules *D*, non pas ſur les bords de l'inſtrument, mais ſur la boëte intérieure, perpendiculairement au verre qui la couvre, & tendre un fil du haut de ce ſtyle au bas de la pinnule placée en *E*, pour avoir un triangle rectangle, qui ſera toûjours dans le même vertical, & qui ſera très-propre à obſerver l'azimuth des étoiles; parce que cette boëte tournant autour du ſeul axe *MN*, le ſtyle pourra bien pancher vers *E*, mais ſon inclinaiſon ne ſe fera que dans le plan du même vertical.

Si l'on veut être aſſûré que la petite boëte où eſt la roſe des vents, ne tourne qu'autour de l'axe *MN*, il faut faire en ſorte que le fil horiſontal *ED* ſoit bien perpendiculaire à l'axe *MN*, ce qui n'eſt pas fort difficile; & il eſt bon d'imprimer ce mouvement autour de *MN*, en appuyant la main ſur *E* ou *D*, pour détruire entierement l'autre mouvement autour de l'axe *ED*.

§. 4. A l'égard des obſervations qui ſe font pendant le jour, ou lorſqu'on voit l'horiſon, tout le monde convient que l'Octans de Hadley & de Smith ſont les plus propres à prendre hauteur.



SECONDE PARTIE.

De l'usage des instrumens à prendre hauteur, & à observer l'Azymuth, pour trouver l'heure.

I. ON trouve facilement l'heure par la hauteur du Soleil ou d'une étoile; & la plûpart des livres de navigation nous donnent la manière de résoudre cette question par le calcul & par le Quartier Sphérique. Il paroît cependant que le Quartier Sphérique a deux grands défauts. Le premier est que dans les grandes hauteurs, on est obligé de suppléer au quart-de-cercle, qui manque à cet instrument; ce qui expose à quelque erreur, par la petitesse des divisions de la ligne droite, qui supplée à ce quart-de-cercle. Le second défaut est que les divisions des heures sur les paralleles à l'équateur, sont trop serrées auprès du méridien, & que les paralleles sont aussi trop serrés auprès du pole, ce qui empêche de déterminer l'heure assez exactement.

Il vaudroit donc beaucoup mieux substituer au Quartier *Sphérique*, un demi cercle, divisé selon la projection stéréographique, qui suppose l'œil au pole ou au zénith. On verra par la construction de cet instrument, qu'il n'a pas les défauts du Quartier Sphérique; car les méridiens ou les azimuths, y sont tous à distances égales, & les paralleles à l'équateur ne sont serrés que vers le pole, à proportion des tangentes de leurs demi-distances au pole.

Ce demi-cercle sphérique contient les projections de

Fig. VII. tous les quarts de méridiens, qui sont des lignes droites *BP*, *CP*, *DP*, &c. & les projections des paralleles à l'équateur, qui sont différens cercles concentriques, dont les demi-diametres *P* 10, *P* 20, &c. sont les tangentes des demi-distances de chaque parallele au pole *P*, par où l'on voit de quelle maniere on peut construire & diviser cet instrument. Mais pour en faciliter l'usage, on élevera au milieu *F* du rayon *PC*, & au milieu *R* de *FC*, les droites *FG*, *RI*, perpendiculaires à *PC*. En voici l'usage dans la question présente.

La déclinaison du Soleil étant donnée, (par exemple, de 23° N.) la latitude d'un pays (57° 10′ N.); la distance au zénith (75°), on trouvera l'heure, en prenant sur *PB* le point de la distance du Soleil au pole Nord (67°). Si la déclinaison étoit Sud, on trouveroit ce point sur le quart-de-cercle *BC*. Ensuite on comptera de part & d'autre du point trouvé (67°) vers *P* & *B*, la distance du Soleil au zénith (75°); on aura à main droite du point *P* dans cet exemple, le point marqué 8; & à main gauche, en descendant du point *B* vers *C*, sur le quart-de-cercle, le point marqué 142. Ensuite ayant attaché un fil au point le plus bas *C*, on le tendra successivement sur les deux derniers points trouvés (8 & 142). Ce fil rencontrera la ligne *GF*, prolongée en deux autres points, dont la distanee sera le demi-diametre d'un cercle, qui doit passer par le premier point (8), trouvé sur la ligne *PB*, & dont le centre doit être sur la même ligne, endeça de *P* à main gauche. Décrivez donc ce cercle, qui viendra couper le parallele de la latitude donnée au point de la projection du zénith, par où passe le méridien éloigné du cercle horaire *PB* (de 98°), ce qui réduit en tems, donne l'heure requise (6 heures 32′ après-midi),

La raison de cette méthode, est que le zénith doit se trouver

trouver dans le parallele de latitude, & dans le petit cercle qui a pour pole le centre du Soleil, & dont la circonférence est autant éloignée du Soleil que le zénith. Or le cercle décrit par la méthode précédente est dans ce cas, selon les regles de la projection stéréographique : donc ce cercle doit déterminer le méridien de l'observation. Lorsque le fil tendu du point *C*, ne peut rencontrer la ligne *GF* qu'à une distance infinie, ou presque infinie, le diametre du cercle requis étant presque infini, sa circonférence doit être regardée sans erreur sensible, comme une ligne droite perpendiculaire à *PB*.

Si le fil ne pouvoit pas couper *GF*, mais seulement *IR*, on doubleroit la distance trouvée sur *IR*, pour avoir le rayon du petit cercle requis.

II. Lorsque la latitude n'est pas donnée, on peut trouver l'heure, non-seulement par le calcul, qui est trop difficile pour les marins, mais encore par le demi-cercle sphérique, en prenant deux hauteurs inégales du Soleil le même jour, & observant la différence des tems ; ce qui ne peut se résoudre qu'en tâtonnant & par hasard, lorsqu'on se sert du Quartier Sphérique. Par exemple, le Soleil ayant 19° 39′ de déclinaison N. ou sa distance au pole N. étant de 70° 21′. Si l'on trouve sa distance au zénith le matin de 51° 41′, & une heure & demi après, de 39° 35′, on trouvera très-aisément l'heure & la latitude en cette maniere. Prenez de part & d'autre, du point de la distance du Soleil au pole (70° 21′), comme dans le premier Article ; sa distance au zénith (51° 41′), vous trouverez à main droite entre *P* & *B*, un point marqué 18° 40′, & à gauche sur le quart-de-cercle *BC*, le point marqué 122° 2′. Tendez le fil sur ces deux points, il coupera *GF* en deux autres points, dont la distance sera le rayon d'un cercle, qui doit passer par le premier (18° 40′),

Prenez de même du point (70° 21′) de part & d'autre, la deuxieme distance au zénith (39° 35′); vous trouverez deux autres points (30° 46′ à droite, & 109° 56′ à gauche), lesquels détermineront sur *FG* le rayon d'un autre cercle, qui doit passer par le premier point (30° 46′). Mais ce premier point ne doit pas être pris dans le méridien *PB*, qui appartient à la premiere observation; on doit le prendre dans un autre méridien, qui fait avec *PB* un angle de 22° 30′, ou de 1 heure ½; & ce second cercle doit avoir son centre sur ce second méridien. L'intersection de ces deux cercles déterminera le zénith, & par conséquent, le parallele de la latitude, que l'on trouvera marquée sur *PC* (de 51° 32′), & le méridien qui passe par ce zénith, faisant avec *PB* un angle de 52° 26′, on aura l'heure de la premiere observation, en divisant ce nombre par 15, ce qui donne ici 3 heures & demi de distance à midi, ou 8 heures 30″ du matin.

On voit combien ce Problème est utile à la mer, où l'on manque souvent l'occasion d'observer la latitude à midi.

Lorsque la distance du Soleil au zénith est fort petite, le rayon du cercle qu'on doit décrire étant petit, se décrit fort aisément; mais lorsqu'elle est fort grande, le rayon de ce cercle est si grand, qu'il est difficile de le bien décrire, à moins qu'il ne soit presque infini.

III. Ce que l'on vient de dire, suppose que le navire ait été sans mouvement dans l'intervalle des deux observations; mais si le navire a fait route, on mesurera l'angle *BAC* compris par la route *AB* du navire, & l'azimuth *ACS* du Soleil; & achevant le triangle rectangle *ACB*, on trouvera par le calcul, ou par le quartier de réduction, ayant réduit en degrés la route *AB*, quel est le mouvement *AC* du zénith vers le Soleil *S*: ensuite on retranchera

Fig. IX.

AC de la premiere distance *AS*, si on a fait route du côté du Soleil, ou bien on l'ajoûtera à cette même distance, si on a fait route du côté opposé au Soleil. Par ce moyen, on aura la distance du Soleil au second zénith *B* dans la premiere observation, & faisant l'opération avec cette distance & avec celle de la derniere observation, on aura deux cercles qui se couperont au zénith de la seconde observation, ce qui donnera l'heure.

Si la distance entre les deux observations surpasse 12 heures; si elle est, par exemple, de 14 heures dans le même jour, ôtez 14 de 24, le reste 10 sera la différence des tems. On aura seulement égard à la variation de la déclinaison dans 14 heures.

Si la distance entre les deux observations surpasse 24 heures, par exemple, si elle est de 26, on doit opérer comme si elle n'étoit que de deux heures, mais en différentes déclinaisons. M. Graham, de la Société Royale de Londres, propose dans les Transactions Philosophiques, au lieu de ce demi-cercle sphérique, une partie d'un grand globe, dont le demi équateur est divisé en heures & minutes. Un compas circulaire, fixé à la distance du Soleil au zénith, sert à décrire deux arcs-de-cercle, qui, par leur intersection, déterminent le zénith.

Il est certain que cet instrument est fort simple, mais il doit être trop grand & trop dispendieux, pour être utile à la navigation. La dépense & l'embarras des grands instrumens, empêchent toûjours les Pilotes de s'en servir. C'est ce qui m'a déterminé à proposer le demi-cercle sphérique.

IV. On peut, au lieu de la distance horaire des deux observations, prendre la différence des azimuths; alors le centre *P* du demi-cercle sphérique, représentera le zénith, & ayant pris sur l'azimuth *PB*, la distance du Soleil

au zénith, on comptera de part & d'autre sa distance au pole, pour avoir le demi-diametre du premier cercle. On fera la même opération sur le second azimuth, pour avoir un second cercle, qui, par son intersection avec le premier, déterminera le pole & le méridien. Mais pour trouver l'heure, ayant trouvé par ce moyen la latitude, on se servira du premier Article de cette seconde Partie, ou des regles ordinaires de la projection stéréographique, qu'il est inutile de répéter ici.

V. Quoique les deux cercles tracés dans les deux Articles précédens, se coupent toûjours en deux points, il ne sera pas difficile de distinguer celui des deux points qui représente le pole ou le zénith, comme dans le demi-globe de M. Graham. Si l'on joint ces deux distances ensemble, celle des tems, & celle des azimuths, on sera plus assûré de l'heure & de la latitude.

VI. On peut trouver l'heure & la latitude par différentes hauteurs de deux étoiles, en les regardant comme une seule étoile, dont la hauteur & la déclinaison auroient varié, & prenant la différence de leur ascension droite, pour la différence des tems, on auroit cet avantage sur les méthodes précédentes, que celle-ci seroit indépendante du mouvement du navire; parce qu'on pourroit observer les deux étoiles presque en même tems.

VII. La méthode la plus facile, & peut-être la *plus sûre*, pour trouver l'heure à la mer pendant la nuit, est d'observer le moment auquel deux étoiles sont dans le même azimuth, ou paroissent à plomb l'une sous l'autre. Car si l'on connoît la latitude, on trouvera l'heure, ou par le calcul, ou par le demi-cercle sphérique. En effet, soit *P* le pole du monde, Nord ou Sud, le plus près des deux étoiles observées, ou le centre du demi-cercle sphérique Soient *PE*, *PA*, les deux méridiens où se trouvent les

Fig. VIII.

étoiles observées *E* & *A*. L'angle *APE* doit être égal à la différence de leurs ascensions droites, & les lignes *PE*, *PA*, doivent être les tangentes de la demi-distance de chaque étoile au pole. Faites passer par les points *E* & *A*, un grand cercle *AEZ*, selon la méthode de cette projection; ce cercle représentera l'azimuth des deux étoiles, & coupera le parallele de latitude en un point *Z*, qui marquera le zénith; la ligne droite *ZPM* sera le méridien du lieu de l'observation. Donc on aura l'heure *APM* de l'étoile *A*, ou *EPM* de l'étoile *E*. Or la différence de l'ascension droite de chaque étoile & du Soleil, donne l'heure requise.

On voit assez qu'on peut trouver la même chose plus exactement par le calcul. Car dans le triangle sphérique *EPA*, connoissant *EP*, *AP*, & l'angle *P*, on aura l'angle *A*, & dans le triangle *ZAP*, avec l'angle *A* & *ZP*, & *AP*, on aura l'angle horaire *ZPA*.

VIII. Si la latitude n'est pas donnée, ou si l'on n'en est pas assûré, il faut avoir deux observations semblables de 4 *étoiles*, pour trouver en même tems l'heure & la latitude. Car soient deux autres étoiles *a* & *e*, qui se trouvent dans un même azimuth, outre les deux premieres *A* & *E*, & supposons que le zénith ou le navire n'aient point changé de place. Prenez les angles *APa*, *aPe*, égaux aux différences d'ascensions droites des étoiles *A*, *a* & *e*, si les deux *observations* ont été faites en même tems : mais si la deuxieme observation a été faite plus tard que la premiere, ajoûtez à l'angle *APa*, la différence des tems réduite en degrés, & ayant placé les étoiles *a* & *e* dans leur cercle de déclinaison, vous ferez passer un grand cercle par les points *a* & *e*, qui coupera le premier azimuth *AEZ* au point *Z*, & ce point donnera le zénith & la latitude. L'angle *APM* sera l'angle horaire de l'étoile *A*.

Par le calcul ; connoiſſant *P E*, *P e*, & l'angle *E P e*, on aura l'arc de grand cercle *E e*, & les deux autres angles du triangle *E P e* ; & par le moyen des triangles *E P A*, *e P a*, ayant les angles *A E P*, *a e P*, j'aurai les angles *Z E e*, *Z e E*, , & par conſéquent, le côté *E Z* du triangle *E Z e*, & l'angle *E P Z* requis, ce qui eſt trop long & trop difficile pour le commun des Pilotes.

IX. Si le navire a été en mouvement dans l'intervalle des deux obſervations, le point *Z* n'eſt pas le zénith ; mais le zénith doit s'être trouvé dans l'azimuth *E Z*, au tems de la premiere obſervation, comme en *V*, & dans l'azimuth *e* Z, au tems de la deuxieme comme en *u*. Donc connoiſſant la longueur de l'arc *V u*, décrit par le navire, & l'angle *Z V u* ou *Z u V* de la route, avec l'azimuth *E Z* ou *e Z*, par le moyen de la bouſſole, on aura la correction *Z u*, en diſant : Comme le ſinus de l'angle *V Z u*, que font enſemble les deux azimuths, eſt au ſinus de l'arc *V u* de la route que l'on prend pour l'arc d'un grand cercle ; ainſi le ſinus de l'angle *V* de la route avec l'azimuth de la premiere obſervation, eſt au ſinus de l'arc *Z u*, ou de la correction, ce qui donne la diſtance *P u* du pole au zénith, & l'heure *u P e* de l'étoile *e*.

X. Si la différence en aſcenſion droite des étoiles *E* & *A* eſt nulle, le triangle *P Z E* s'évanoüit, & il n'eſt pas néceſſaire de connoître *P Z* pour avoir l'heure. Le cas eſt le même, lorſque la différence en aſcenſion droite eſt de 180°. Mais dans ces deux cas, les deux étoiles ne ſont dans le même vertical, que l'orſqu'elles ſont dans le méridien. Ainſi l'heure ſe trouvera par la différence entre leur aſcenſion droite & celle du Soleil.

XI. Plus l'une des étoiles *E* eſt proche du pole, moins l'obſervation dépend de la latitude ; en ſorte que ſi l'étoile polaire étoit dans le pole même, il ne ſeroit pas néceſſaire

de connoître la latitude en se servant de cette étoile; c'est pour cela qu'elle est plus utile qu'aucune autre à cette observation, sur tout dans les petites latitudes. Car si le zénith étoit dans l'équateur, l'azimuth de cette étoile le plus éloigné du Nord, n'en seroit éloigné que de deux degrés. On doit donc se déterminer à l'étoile polaire, & chercher, autant qu'il est possible, une autre étoile, qui differe très-peu de celle-ci en ascension droite, pour trouver l'heure plus exactement.

XII. La latitude étant donnée avec la situation de deux étoiles, que l'on suppose à la même hauteur dans le même tems, on peut trouver l'heure par le calcul, ou par le demi-cercle sphérique. Car en supposant ici la dénomination des principaux élémens de la sphere, tirée de l'Astronomie Nautique de M. de Maupertuis, le calcul, dans le Problême 29, donne $rsx - rsx' = cy'u' - cyu$. Mais par les principes de la Trigonométrie rectiligne, nommant a le sinus de la différence d'ascension droite des deux étoiles, & b son cosinus, on a $u't - ut' = ra$ & $u' = \frac{ta - bu}{r}$, ce qui donne $rsx - rsx' = \frac{cy'ta - cy'bu}{r} - cyu$, ou $-rrsx + rrsx' + cy'ta = cy'bu + cyru$. On trouve la même chose par le demi-cercle sphérique, en y appliquant les regles connues de la projection.

Voyez ci-après, p. 194, la Figure & les Formules.

XIII. Comme il est difficile de trouver deux étoiles qui arrivent en même tems à la même hauteur, on peut attendre que la deuxieme étoile arrive à la hauteur de la premiere; & observant la différence des tems, la question se résoudra comme si la deuxieme étoile avoit une plus grande ou plus petite différence d'ascension droite avec la premiere.

XIV. On peut appliquer la même réflexion à la méthode de l'Art. VII. Car si par un compas de variation, on

connoît l'azimuth *EA* de l'étoile *E*, & qu'une autre étoile arrive au même azimuth *EA* après un tems déterminé, on trouvera l'heure de la même maniere.

XV. Si on obſerve quatre étoiles qui aient de deux en deux la même hauteur, les deux dernieres donneront un nouvel azimuth différent du premier, & l'interſection des deux azimuths déterminera le zénith, la latitude & l'heure.

XVI. Si le navire a été en mouvement dans l'intervalle des deux obſervations, on trouvera le zénith par la méthode de l'Article IX.

XVII. On a différentes méthodes pour trouver l'heure par l'azimuth d'un aſtre, & la latitude donnée. Car ayant la diſtance *PZ* du pole au zénith, l'angle de l'azimuth *EZ* avec le méridien *PZ*, & la déclinaiſon de l'aſtre, ou ſa diſtance au pole *EP*, on aura l'heure *ZPE*. Mais pour la trouver ſur le demi-cercle ſphérique, il faudra décrire un azimuth *EZ*, qui faſſe avec le méridien *PZ* l'angle donné, ſelon la méthode de cette projection. Cet azimuth coupera le parallele de la déclinaiſon de l'aſtre en quelque point *E*, & le méridien *PE* donnera l'angle horaire *ZPE*, que l'on réduira à l'heure ſolaire.

XVIII. On peut encore trouver l'heure par la ſeule différence des azimuths de deux étoiles, ce qui ne dépend pas de la variation de la bouſſole, comme les méthodes précédentes. Mais le calcul en eſt très-difficile, & la queſtion ſe réduit à un Problème du quatrieme degré. Car en me ſervant des formules, dénominations & figures de M. de Maupertuis, ſoit *a* le ſinus de la différence des aſcenſions droites; *b* le coſinus; *f* le ſinus de la différence des azimuths, & *g* ſon coſinus.

La troiſieme Formule de M. de Maupertuis, donne $\frac{rn}{m} = \frac{su - cx}{t}$ (en prenant $x = \frac{rx}{y}$, pour la tangente de la délinaiſon

déclinaison d'un astre) & $\frac{rn'}{m'} = \frac{su'-cx'}{t'}$ pour un autre astre; mais $m' = \frac{gm-fn}{r}$, & $n' = \frac{fm+gn}{r}$. Donc $\frac{rn'}{m'} = \frac{frm+grn}{gm-fn}$ $=$ (à cause de $m = \frac{rnt}{su-cx}$) $\frac{frrt+grsu-grcx}{grt-fsu+fcx} = \frac{su'-cx'}{t'}$; mais nous avons $t' = \frac{bt-au}{r}$, & $u' = \frac{at+bu}{r}$. Donc en substituant ces valeurs, on aura : $\frac{frrt+grsu-grcx}{grt-fsu+fcx} = \frac{ast+bsu-crx'}{bt-au}$.

Ce qui donne l'équation suivante :

$$\left.\begin{array}{l} tt-\frac{grx}{fc} \\ -\frac{au}{b} \\ -\frac{asx}{bc} \\ +\frac{grrx'}{bcf} \end{array}\right\} t = \left.\begin{array}{l} \frac{rsx'}{bc} \\ +\frac{sx}{c} \\ -\frac{agrx}{bcf} \end{array}\right\} u \quad \begin{array}{l} +\frac{agr^3s}{bccf} \\ -\frac{rrss}{cc} \\ -\frac{rxx'}{b} \end{array}$$

que l'on peut exprimer ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} tt+A \\ \quad +Cu \end{array}\right\} t+Bu+Dr=0.$$

Et réduisant ensuite la valeur de $u = \sqrt{rr-tt}$, on aura :

$$0 = Dr+Br \begin{array}{l} +At \\ +Crt \end{array} \begin{array}{c} -\frac{Btt}{2r} \\ +tt \end{array} \frac{-Ct^3}{2r} \frac{-Bt^4}{8r^3} \frac{-Ct^5}{8r^3} \frac{-Bt^6}{16r^5} - \&c.$$

& par le retour des suites, on aura, selon la Formule du P. Renaud, *p.* 437, premiere édition, de l'analyse démontrée,

$$t = \frac{-Dr-Br}{A+Cr} - \frac{2rr+Br}{2}\left(\frac{\overline{D+B}^2}{\overline{A+Cr}^3}\right) + \frac{\overline{2r-B}^2(r)+Acrr+ccr^3}{2(A+cr)^5}\left(\begin{array}{c}-D\\-B\end{array}\right)^3$$

+ &c. c'est-à-dire, pour les deux premiers termes,

$$t = \frac{agr^3s-bfrrss-ccfrxx'+cfrrsx'+bcfrsx-acgrrx}{-bcgrx-acfsx+cgrrx'-accfr}$$

$$\frac{(-2bcfrr-frrsx'-bfrsx+agrrx)\times\left(\begin{array}{l}-agrrs+bfrss+ccfxx'\\-cfrsx-bcfsx+agcrx\end{array}\right)^2}{2(-bgrx-afsx+grrx'-acfr)^3}$$

Lorſque $f = 0$, la premiere équation donne celle du Problème 26. de M. de Maupertuis, $rras = rcx't - bcxt + acxu$, & le premier terme de la ſuite, donne $rras = rcx't - bcxt + acrx$. Lorſque $b = 0$, l'équation donne $t = \frac{-cfsx'u + cgrxu - gr^3s + ccfxx'}{ccfu + cfsx - cgrx'}$. Lorſque $c = 0$; ou que le pole eſt au zénith, on trouve dans l'équation & dans la ſuite, t infini; ce que l'on ſçait d'ailleurs. Si l'on ſuppoſe x & $x' = 0$; on trouvera par l'équation:

$$t = \sqrt{\frac{aa}{2} \frac{+abgrs}{ccf} \frac{-bbss}{cc} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{2} \frac{+abgrs}{ccf} \frac{-bbss}{cc}\right)^2 - \left(\frac{bss}{cc} \frac{-agrs}{ccf}\right)^2 rr}}.$$

Pour conſtruire cette équation, $\left.\begin{matrix} tt + A \\ + Cu \end{matrix}\right\} t + Bu + Dr = 0$; par le moyen de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, dont les coordonnées ſoient x & y; faiſons $A = \frac{B}{C} - Cu - t + x$ & $t = y - \frac{B}{C}$, ce qui donne $u = \frac{x - t - A}{C} + \frac{B}{CC}$, & l'équation devient $xy - \frac{BA}{C} + \frac{BB}{CC} + Dr = 0$. On voit aſſez la conſtruction qui réſulte de cette réduction, & combien ce Problème eſt important, puiſqu'il eſt indépendant de la réfraction & de la variation de la bouſſole. On pourroit le rendre plus facile, par le moyen d'une Table, ou d'un Inſtrument Géométrique.

FIGURE ET DÉNOMINATIONS DE L'ASTRONOMIE NAUTIQUE.

Fig. X. LE rayon $CP = r$.

Le ſinus de la déclinaiſon de l'aſtre $CB = x$, ſon coſinus $DB = y$.

Le ſinus de la hauteur polaire $PQ = s$, ſon coſinus $CQ = c$.

Le sinus de la hauteur de l'astre $CG = h$, son cosinus GL ou $GE = k$.

Le sinus de l'angle horaire $= t$, son cosinus $= u$.

Le sinus de l'angle azymuthal $= m$, son cosinus $= n$.

FORMULES.

I. $\pm rsh \mp rsx = cyu$.

II. $rrx \pm nck = rsh$.

III. $+ rnyt \pm rmcx = msyu$, ou $- rnyt + rmcx = msyu$, lorsque F est entre B & O.

IV. $rcht \pm nskt = rmku$.

V. $mk = yt$.

TROISIEME PARTIE.

En quelle rencontre l'erreur des Instrumens influe moins dans la détermination de l'heure.

I. POUR trouver dans quelle rencontre l'erreur dans la hauteur influe plus ou moins dans la détermination de l'heure, je me servirai des formules de M. de Maupertuis, nommant dH l'erreur dans la hauteur, & dE celle de l'heure. Or nous avons par la nature du cercle, $r : k :: dH : dh = \frac{kdH}{r}$; & la premiere formule de M. de Maupertuis donne $\pm rrdh = cydu$, ou $du = \frac{rrdh}{cy}$ $=$ (en substituant la valeur de dh) $\frac{rkdH}{cy}$. Mais l'équation du cercle donne aussi, $t : r :: du : dE = \frac{rrkdH}{tcy}$.

Cette expression fait voir combien une erreur commise dans l'observation de la hauteur d'un astre, influe dans le calcul de l'heure; puisqu'en se trompant de la quantité dH dans la hauteur, on se trompe de la quantité $\frac{rrkdh}{tcy}$, dans la détermination de l'heure. Ainsi l'erreur de la hauteur est à celle de l'heure comme tcy est à rrk, ou en supposant c & y constantes, comme t est à k: c'est-à-dire, que l'erreur de l'heure sera d'autant plus petite, que la hauteur sera plus grande, & l'heure plus près de 6 heures; puisqu'alors le cosinus k de la hauteur, sera plus petit, & le sinus t de l'heure plus grand. Par conséquent, on doit préférer les astres qui sont auprès du cercle de 6 heures, & ceux qui sont plus élevés; d'autant plus que ceux-ci sont moins exposés à l'erreur de la réfraction.

II. Pour trouver le *minimum* de cette valeur $\frac{rrkdH}{tcy}$, j'en prens la différence, en supposant dH, c & y constantes; & l'égalant à l'infini, je trouve $r = u$, ou $t = o$; c'est-à-dire, que la plus grande erreur dans l'heure, est lorsque l'astre est au méridien; ce que l'on sçait d'ailleurs. Mais si on égale cette différence à zéro, on trouve $rdk = kdt$, ou $\frac{t}{k} = \frac{dt}{dk}$. Substituons à cette raison, sa valeur tirée de la premiere formule de M. de Maupertuis, $\pm rrdh = cydu$, ou $\mp rrukdk = -cythdt$, ou $\frac{dt}{dk} = \pm \frac{rruk}{cyth}$; ce qui donne $cytth = \pm rrukk$, ou $kr\sqrt{u} = t\sqrt{hcy}$, lorsque l'astre est au-dessus du point B, ou entre 6 heures & midi, conformément à la note du problême I. de l'Astronomie Nautique. Mais lorsqu'il est au-dessous, la valeur de k est imaginaire. Ce qui fait voir qu'il faut chercher la moindre erreur dans les hauteurs qui sont entre midi & 6 heures, & non pas au-dessous. Et en

effet, si k étoit $= 0$, l'erreur $\frac{rrkdH}{tcy}$ ne seroit pas $= 0$, parce que t seroit $= 0$. Substituons dans cette formule la valeur de $k = \frac{t}{r} \sqrt{\frac{hcy}{u}}$, nous aurons le moindre $dE = rdH\sqrt{\frac{h}{cyu}}$. Ce qui fait voir qu'entre midi & 6 heures, on doit préférer la moindre hauteur & la moindre distance à midi.

L'équation $k = \frac{t}{r} \sqrt{\frac{hcy}{u}}$, donne $urr(rr - hh) = tthcy$, & $h = -\frac{ttcy}{2urr} \pm \sqrt{rr + \frac{t^4ccyy}{4uur^4}}$. Si $r = r$, ou $u = 0$, l'astre étant au cercle de 6 heures, la quantité rr disparoîtra, & l'on aura $h = 0$. Donc $dE\,(= rdH\sqrt{\frac{h}{cyu}})$ seroit alors $= rdH\sqrt{\frac{0}{0}}$ ou $= \sqrt{-\frac{rr}{2} + \frac{rr}{2}}$. Quelle est la valeur de cette fraction $\frac{0}{0}$? M. le Marquis de l'Hôpital prescrit (Article 163, des infiniment petits) d'en différentier le numérateur & le dénominateur; ce qui donne encore ici $\frac{0}{0}$: & M. Jean Bernoulli veut qu'on prenne une 2[e] 3[e] 4[e], &c. différence des deux termes, jusqu'à ce que la fraction $\frac{0}{0}$ disparoisse. Mais cela ne suffit pas dans le cas présent, puisque quand même on prendroit une infinité de différences, on trouvera toûjours $\frac{0}{0}$, ce qui vient des incommensurables. Il faut donc en délivrer cette fraction, & faire $dE^2 = \frac{rrhdH^2}{cyu}$, & différentiant les deux termes, on aura $\frac{dH^2rrdh}{cydu}$; & par la substitution de $\frac{dh}{du} = \frac{cy}{rr}$, on aura $dE = dH$, lorsque h & $u = 0$: ce qui se démontre comme la méthode de M. le Marquis de l'Hôpital, en faisant $AB = rr$, $AP = tt$, $PN = h$, $PO = cyu$, & $PM = \frac{rrh}{cyu}$. Cela peut aussi servir à perfectionner la méthode de M. Bernoulli.

III. Dans ce moindre $rdH\sqrt{\frac{h}{cyu}}$, il y a encore un moindre, qui eſt le *minimum minimorum*. On le trouve en égalant à zéro la différence de cette expreſſion ; ce qui donne $\frac{dh}{du} = \frac{h}{u}$; & en ſubſtituant la valeur $\frac{cy}{rr}$ de $\frac{dh}{du}$, on aura $h = \frac{ucy}{rr}$. Donc le *minimum* eſt $= dH$; ce qui fait voir que la moindre erreur poſſible, eſt égale à celle de la hauteur, & cette erreur eſt dans le cas de $h = \frac{ucy}{rr}$.

Si l'on ſubſtitue dans la premiere formule $\frac{rrkdH}{cyt}$, la valeur de $yt = mk$, tirée de la 5[e] de M. de Maupertuis, on aura $\frac{rrdH}{cm}$, & l'on verra clairement que l'erreur de l'heure ne peut pas être moindre que celle de la hauteur, puiſque le quarré rr ne peut pas être plus petit que le rectangle cm : mais comme ce quarré peut devenir infiniment plus grand que cm, l'erreur de l'heure peut devenir infinie, par rapport à celle de la hauteur, & c'eſt lorſque c ou $m = 0$; mais cela ne doit s'entendre que dans le cas des deux erreurs infiniment petites : car ſi l'on ſuppoſoit celle de la hauteur finie, on ne pourroit pas conclurre que l'erreur de l'heure fût infinie. Comme dans le cercle dont les appliquées ſont k, & les coupées depuis le centre, ſont h, l'équation étant $rr - hh = kk$, on trouve bien que $dH : dh :: r : k$, & que dans le cas de $k = 0$, dH eſt infini par rapport à dh ; parce qu'alors k devient $= r$, & $dh = 0$; mais on ne peut pas dire que dh devenant une quantité finie, dH ſoit réellement infinie lorſque $k = 0$.

On voit ici qu'on doit préférer les aſtres les plus près du premier vertical, dans lequel $m = r$; l'erreur dE étant alors $= \frac{r}{c} dH$. Si c étoit encore $= r$, ou le pole dans

l'horifon, l'erreur dE feroit $= dH$. En genéral l'erreur de l'heure $\frac{rrdH}{cm}$ eft à celle de la hauteur, en raifon compofée inverfe du cofinus de la hauteur polaire, & du finus de l'angle azymuthal.

Si dans la valeur trouvée de $h = \frac{ucy}{rr}$, on fait $c = r$, & $y = r$; c'eft-à-dire, fi l'aftre eft dans l'équateur, & le pole dans l'horifon, on aura $dE = dH$; & fi l'on avoit fubftitué ces deux valeurs $y = r$, & $c = r$, dans la premiere formule $\frac{krrdH}{cyt}$, on auroit trouvé $dE = \frac{kdH}{t}$; ce qui revient au même, parce que dans ce cas, $k = t$, ou $u = h$.

IV. Si l'on fe trompe feulement dans la hauteur du pole, foit dS cette erreur, nous aurons $r : c :: dS : ds = \frac{cds}{r}$. La premiere formule de M. de Maupertuis nous donnera $\mp rxds = cydu + uydc$, ou $\mp rcxds + uysds = ccydu$, & $du = \frac{uys \mp rcx}{cyr} dS$, & la proportion $t : r :: du : dE$ donne $dE = \frac{uys \mp rcx}{cty} dS$.

On voit d'abord que $dE = 0$, lorfque $uys = \pm rcx$. Si l'aftre eft dans l'équateur, on a $x = 0$, $y = r$. Donc alors $dE = \frac{us}{ct} dS$, qui feroit $= 0$: fi u ou S étoient $= 0$, c'eft-à-dire, fi le pole étoit à l'horifon, ou l'aftre au Cercle de 6 heures. Et en effet, dans la fphere droite, l'heure ne peut pas varier fans que la hauteur de l'aftre varie, & dans la fphére oblique, l'aftre eft toûjours dans le cercle de 6 heures, s'il eft dans l'équateur.

Si $u = 0$, ou $t = r$, dE fera $= \mp \frac{x}{y} dS$; & fi de plus $x = y$, dE fera $= dS$. Il vaut donc mieux obferver les aftres qui font près du cercle de 6 heures, & dont la déclinaifon eft très-petite.

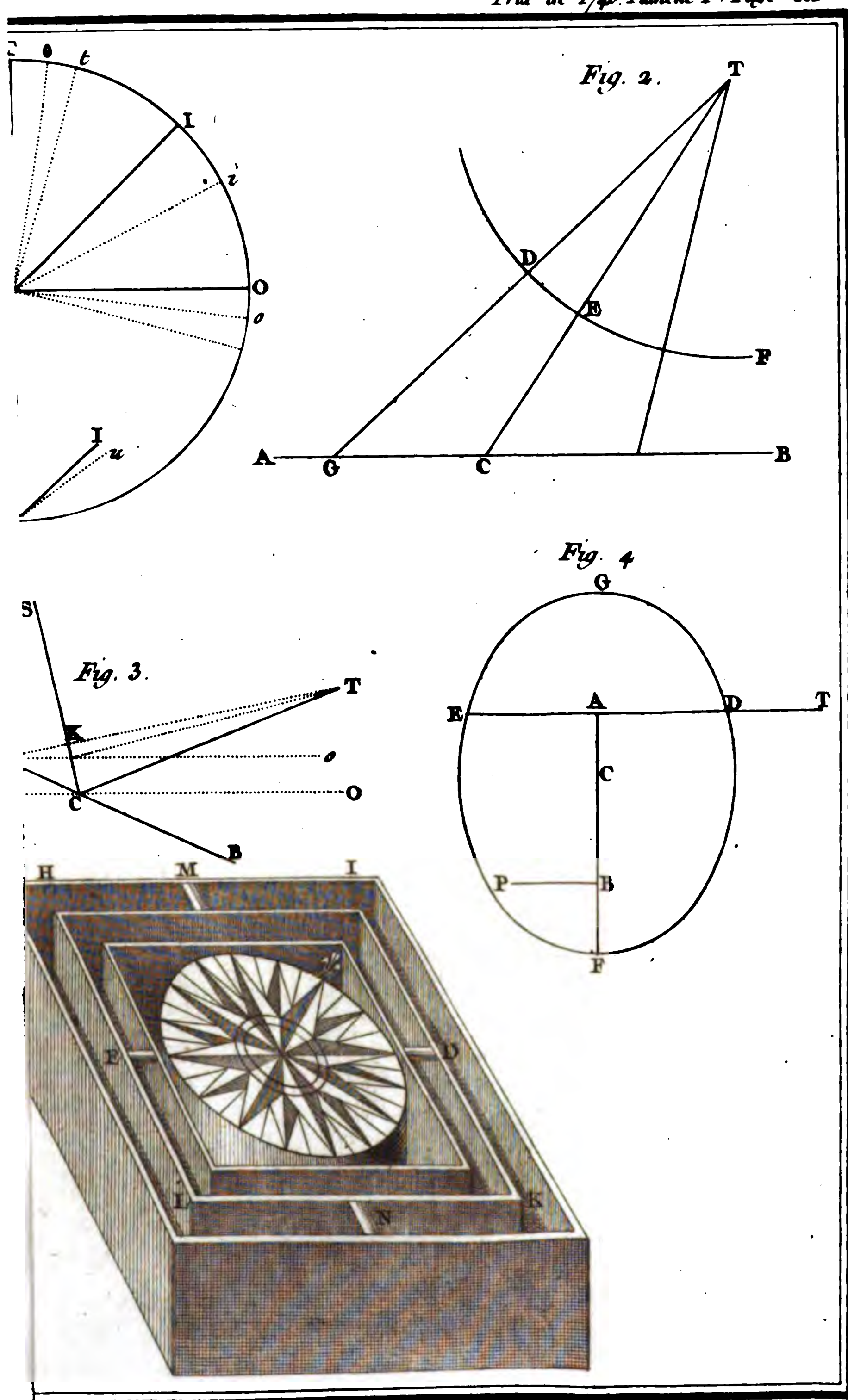
Il eft inutile de chercher le *minimum* de cette formule;

puisque dE peut devenir $=o$, & c'est lorsque $uys = \pm rcx$, ou $x = \frac{urs}{\sqrt{r^4 - sstt}}$.

V. Pour trouver de même dans quelle rencontre l'erreur de l'azymuth (dM) influe moins sur l'heure, nous avons $r : n :: dM : dm = \frac{ndM}{r}$. La premiere formule de M. de Maupertuis donne $dh = \frac{\pm cydu}{rr}$; & la deuxieme, $dh = \mp \frac{ckkmdm}{nkrs \pm nnch}$. Donc $\mp kkmrrdm = (\mp nkyrs + nncyh)$ du, ou $du = \frac{\mp kkmrr}{\pm nkyrs + nncyh} du =$ (en substituant $yt = mk$) $\frac{\mp rrkt}{\pm nkrs + nnch} dm = \frac{\mp rkt}{\pm krs + nch} dM$. Mais $t : r :: du : dE = \frac{\mp rrk}{\pm krs + chn} dM$.

On voit d'abord que l'erreur est moindre, lorsque les astres sont au-dessus du point B, puisque dans ce cas le dénominateur est $krs + chn$.

Si $s = r$, on a $dE = dM$, lorsque le pole est au zénith. En prenant la différentielle de cette formule, & si on l'égale à zéro dans le cas de l'astre au-dessus du point B, en faisant seulement k, h & n variables, on trouvera $(hhn + kkn)$ $dk = hhkdn$, ou $dk = \frac{hhk}{rrn} dn =$ (par la deuxieme formule de M. de Maupertuis) $\frac{-ckhdn}{krs + chn}$. Donc $k = \frac{-chhn - crrn}{rsh}$. Donc en substituant cette valeur de k dans la formule $dE = \frac{-rrk}{krs + chn} dM$, on aura le moindre requis, $\frac{rr + hh}{-rs} dM$. Ce qui fait voir que l'erreur est moindre, lorsque la hauteur de l'astre est fort petite au-dessus du point B, & lorsque le pole est fort élevé au-dessus de l'horison. Le moindre au-dessous de B est $\frac{r^3 - rhh}{2shh - srr} dM$. Si l'on substitue à la place de h, sa valeur $\frac{cyu + rsx}{rr}$, tirée de la premiere formule de


Fig. 2.
T
D
E
F
A
G
C
B
I
i
O
o
t
u
Fig. 3.
S
K
T
o
O
C
B
Fig. 4
G
E
A
D
T
C
P
B
F
H
M
I
E
D
L
N
K

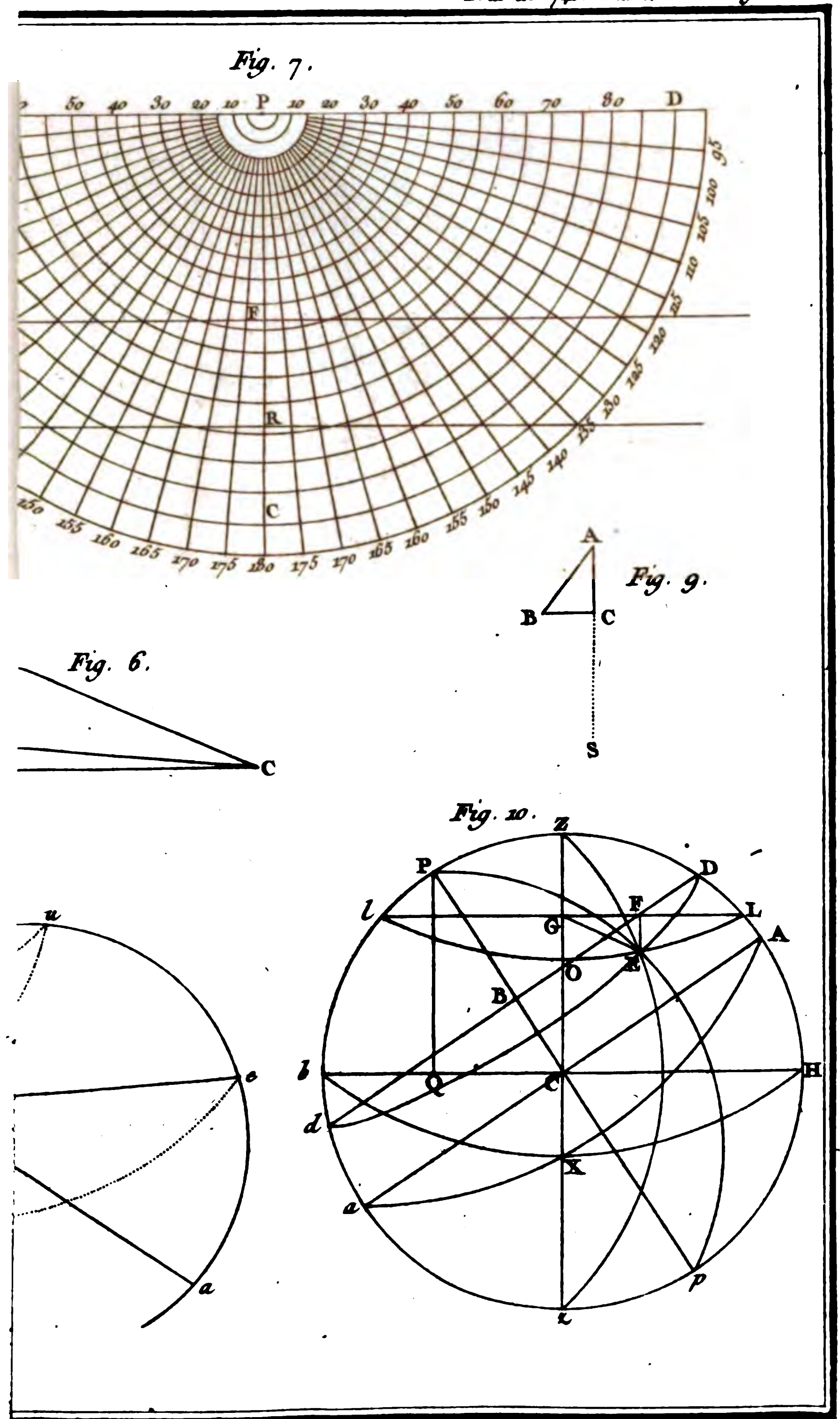


Fig. 7.
P
D
F
R
C
Fig. 9.
A
B
C
S
Fig. 6.
C
Fig. 10.
Z
P
D
l
F
L
G
A
O
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
z
u
e
a

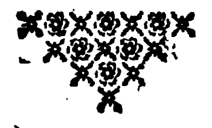
de M. de Maupertuis, on verra que l'erreur est moindre du côté du cercle de 6 heures, où $u = 0$, dans les astres qui sont au-dessus de B, ou plutôt dans ceux qui répondent au point B.

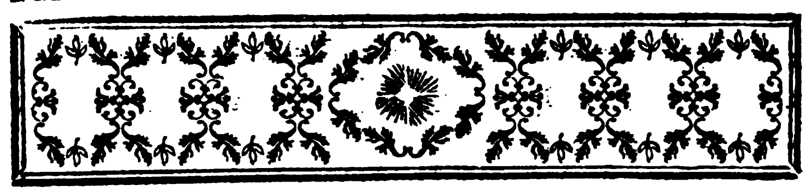
CONCLUSION.

La meilleure maniere de trouver l'heure en mer par observation, pendant la nuit, est d'observer le passage de deux étoiles par le même azymuth, parce que cette observation est très-aisée, & qu'elle n'est pas exposée aux erreurs de la réfraction, de la variation de la boussole, & de la suspension des instrumens à plomb. Un fil à plomb suffit, lorsque deux étoiles sont dans le même vertical.

La meilleure maniere pendant le jour, est de prendre deux hauteurs du Soleil, & d'observer la différence des tems & des azymuths; parce que cette observation est indépendante de la latitude, & que la différence des tems corrige la différence des azymuths, & au contraire.

On peut aussi se servir de l'heure du lever ou du coucher du Soleil, ayant égard à la réfraction; & il est inutile de répéter ici ce que l'on trouve ailleurs. On peut encore employer le Problème XXX de M. de Maupertuis, qui est indépendant de la hauteur du pole & de la réfraction.





ADDITIONS ET CORRECTIONS

Faites à la Piece cottée N° IV, & qui a pour Sentence & Devise :

Nihil unquàm invenietur, si contenti fuerimus inventis.
Sen. *Ep.* 64.

L'ARTICLE second de la premiere Partie, doit être changé en cette maniere.

II. Ce que l'on vient de dire, prouve qu'on peut aujourd'hui observer la hauteur des étoiles sur un navire, beaucoup plus exactement qu'on ne le pouvoit avant l'invention des Octans à miroir. Mais la plus grande difficulté, qui est la suspension des instrumens à plomb, subsiste encore, & il est question de la vaincre, ou au moins de la diminuer autant qu'il sera possible. C'est même le principal objet que nous devons nous proposer, pour suivre les vûes de l'Académie Royale des Sciences.

M. Bouguer a fait sur cette matiere une remarque importante, qui mérite toute notre attention : on la trouve dans le Chap. IIIe de sa Méthode d'observer sur mer la hauteur des astres. « Représentons-nous, dit-il, un pen« dule, un poids suspendu à l'extrémité d'un fil, ce pen« dule demeurera exactement vertical, tant que le navire « cinglera avec un mouvement parfaitement uniforme :

» mais il commencera à faire des vibrations, aussi-tôt que
» la vitesse du sillage souffrira quelque changement; par-
» ce que le mouvement du poids ne s'accordera pas avec
» le mouvement du point de suspension. Si une vague,
» par exemple, en choquant la proue, fait diminuer tout
» à coup la vitesse du navire d'une certaine quantité, le
» poids ira ensuite plus vîte que le point de suspension de
» cette même quantité; & ainsi il avancera vers l'avant,
» en décrivant un arc-de-cercle par rapport au navire,
» jusqu'à ce qu'il ait perdu en montant toute sa vitesse re-
» lative : mais lorsqu'il l'aura perdue, il retournera en ar-
» riere par sa pesanteur; il fera donc plusieurs vibrations
» de part & d'autre; & comme l'agitation de la mer est
» continuelle, ces vibrations ne cesseront presque jamais.
» Or la même chose doit arriver aussi aux instrumens pro-
» pres à prendre hauteur; car ce ne sont que des especes
» de pendules, malgré tous les ressorts & tous les genoux
» auxquels ils sont attachés. »

D'un autre côté, M. Hughens ayant proposé dans son excellent traité, *De Horolog. Oscillat.* de suspendre son horloge de la même maniere que l'on suspend les boussoles, en y ajoûtant un poids de 50 livres, conclut en cette maniere : *Quibus ita se habentibus, quâcumque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium...... Porrò axium crassitudo quæ pollicem æquat, gravitasque plumbi inferiùs appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut, si fortè succussu navis graviore commotum fuerit, continuò ad quietem perpendiculumque suum revertatur.*

Ces deux sentimens, qui paroissent opposés, doivent nous tenir en suspend, jusqu'à ce que nous ayons bien examiné la nature du mouvement d'un Astrolabe, tel que *EMOMD*, dont le centre de gravité & de grandeur est au point *A*, & que je suppose suspendu comme une *Fig. IV. n° 2.*

bouſſole, ou comme l'horloge de M. Hughens.

Cet aſtrolabe étant en repos, ou, ce qui revient au même, *demeurant exactement vertical, tant que le navire ſe meut d'un mouvement parfaitement uniforme*; je ſuppoſe d'abord que la viteſſe du ſillage venant à augmenter, le point *C* de ſuſpenſion reçoive une nouvelle impreſſion, ſelon une direction quelconque, parallele au plan de l'inſtrument (nous parlerons dans la ſuite, de la direction oblique, ou perpendiculaire au même plan). On pourra toûjours décompoſer cette direction parallele en deux autres, l'une *CA*, verticale, & l'autre *CE*, horiſontale. La direction verticale ne produira aucun balancement, & il ne reſtera que la direction horiſontale, qui fera effort pour mouvoir toutes les parties *M* de l'Aſtrolabe, autour d'un centre fixe *B*, que l'on appelle, *centre de rotation*; tandis que la peſanteur réunie au centre de gravité *A*, fera effort pour mouvoir l'Aſtrolabe autour du point ou de l'axe de ſuſpenſion *C*.

Pour déterminer exactement le centre de rotation *B*; il faut ſuppoſer l'Aſtrolabe ſans peſanteur, ou qu'il ſe meuve ſur un plan horiſontal infiniment poli, & ſans frottement, parce que ce mouvement de rotation n'eſt produit que par la ſeule inertie des particules *M*, & qu'il eſt indépendant de leur peſanteur. Si de chaque point *M* de l'Aſtrolabe, on mene au centre *B* une ligne *MB*, on voit que le point *B* étant immobile, toutes les forces d'inertie *M* doivent être en équilibre avec la puiſſance appliquée en *C*. Suppoſons donc que le point *C* ſoit porté en *c* autour de *B*, les particules *M* ſeront portées en *m* ſur les directions *Mm*, perpendiculaires à *BM*, & les petites lignes *Mm* ſeront proportionnelles aux rayons *BM*, *BM*, &c. Les forces de ces particules ſont en raiſon compoſée de leurs maſſes, & de leurs viteſſes initiales, ou de *M*. *BM*;

& il résulte de ces forces qui résistent au mouvement de rotation, une impression (B), qui pousse le centre B perpendiculairement à CB. Cette impression B est dirigée du même côté où tend la force C, selon la direction BP, perpendiculaire à CB.

Prolongeons chaque Mm en H, & abbaissons CH perpendiculaire à MH. Nous avons donc un levier coudé HCB, dont le point d'appui est C, & le moment de la force d'inertie $M.BM$, appliqué en H, sera $= M.BM.CH$; ce qui donne pour l'équilibre, $B.CB = M.BM.CH$. Mais abbaissant MF perpendiculaire à CB, nous avons (à cause des triangles semblables CHG, FBM, GBM), $CH : CG :: BF : BM :: BM : GB$. Donc $CG.BF = CH.BM$; & $\overline{BM}^2 = BF.GB$. Donc en substituant ces valeurs, on aura : $B.CB = M.CG.BF =$ (à cause de $CG = CB - GB$) $M.BF.CB - M.BF.GB = M.BF.CB - M.\overline{BM}^2$; & $B = M.BF - \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$. Donc $\int B = \int M.BF - \int \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$; Mais $\int B = 0$, parce que toutes les impressions faites sur le point B, doivent être les unes positives, & les autres négatives, pour conserver ensemble un équilibre qui rende le point B immobile au commencement du mouvement. Donc $\int M.FB = \int \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$.

Soit A la somme de toutes les particules qui composent l'Astrolabe, on aura par la nature du centre de gravité, ou plutôt du centre de masse, $\int M.BF = A.BA = \int \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$, & $CB = \frac{\int M.\overline{BM}^2}{A.BA}$. Donc la distance CB est égale à celle d'un pendule composé, suspendu au point B, & dont le centre d'oscillation seroit en C. Car telle est la propriété du centre d'oscillation, comme l'a démontré

M. Hughens, *pag.* 100, de ſon livre *De Horolog. Oſcillat.* Et l'on ſçait par les démonſtrations du même Auteur, que l'on peut prendre le centre de ſuſpenſion pour centre d'oſcillation, auquel cas *C* deviendra centre de ſuſpenſion.

La viteſſe du centre de gravité *A*, eſt à celle du point *C* comme *BA* eſt à *BC*. Le point *c* ſe trouvant toûjours dans la ligne *CE*, par l'hypotheſe, le centre de rotation *B*, décrira la cycloïde ordinaire, comme l'a démontré M. Clairaut, dans les Mémoires de 1736. Le cercle générateur aura pour rayon *CB*, & ſon centre roulant ſur *CE*, le point *B* ſera le point décrivant du côté de *P*. La ligne *CB* ſera la tangente initiale de cette cycloïde.

Si l'on prend l'Aſtrolabe pour un cercle homogène, on aura, ſelon la regle d'Hughens, *pag.* 128, *De Horol. Oſcillat.* $CA : AO :: AO : 2AB$. Donc $AB = \frac{\overline{AO}^2}{2CA}$. Donc la diſtance *AB*, croît en raiſon compoſée de la raiſon directe doublée du rayon *AO*, & de la raiſon ſimple inverſe de la diſtance *CA*. Donc plus le point *C* de ſuſpenſion de l'inſtrument ſera proche de ſon centre de gravité *A*, moins il ſera expoſé à tourner autour de *B*, ce point étant éloigné à proportion; en ſorte que ſi $CA = 0$, on auroit $AB = \infty$. De même, plus le quarré du rayon *AO* ſera grand, ou plus l'aire du cercle ſera grande, moins l'Aſtrolabe ſera expoſé à tourner autour de *B*.

On ne peut pas anéantir la diſtance *CA*; parce que ſi l'Aſtrolabe étoit ſuſpendu par ſon centre de gravité *A*, on ne ſeroit jamais aſſûré que le point *O*, par où commence la diviſion, fût dans la verticale *AB*, & qu'ainſi l'aſtrolabe ſeroit inutile à l'obſervation de la hauteur des aſtres.

Si le point *C* étoit ſeulement une ou deux lignes au-deſſus du centre de gravité *A*, on ſeroit preſque dans la

même incertitude. Il faut donc s'attacher principalement à augmenter le rayon *AO* autant qu'il sera possible; ce qui fournira trois avantages: car si le rayon *AO* est 10 fois plus grand, les degrés de l'instrument seront 10 fois plus sensibles; le point *B* sera 100 fois plus éloigné, & la pesanteur de l'Astrolabe 100 fois plus grande. On doit même tâcher d'augmenter considérablement la pesanteur absolue de l'instrument, parce qu'elle résiste beaucoup à ce mouvement de rotation autour du point *B*, & qu'elle peut même l'anéantir.

En effet, dans le calcul précédent, on n'a pas considéré la pesanteur des particules *M* de l'Astrolabe, mais seulement leur inertie. Cette pesanteur sera cause que le centre *B* restera moins en arriere, & qu'il sera repoussé vers *P*, sur la ligne horisontale *BP*. Soit *A* le poids de l'instrument, réuni au centre de gravité *A*. Soit *C* la force qui pousse le point *C*, & lui fait parcourir *Cc*. Ayant décrit du centre *B* les petits arcs *Cd*, *Ae*, on verra que la puissance *C* fait effort pour élever le poids *A* de la hauteur *cd*, & que le poids *A* fait effort pour descendre de la hauteur *ae*. Or, $cd : ae :: CB : AB$; donc le moment de la force $C = C.\ cd$ étant égal à celui du poids *A*, dans l'état d'équilibre de ces deux forces, nous aurons $C.\ cd = A.\ ae$, & $C : A :: AB : CB$; ou $C = \frac{A.\ AB}{CB}$. Mais par la regle d'Hughens, *pag.* 124, *De Horol. Oscillat. Si magnitudo eadem nunc breviùs, nunc longiùs suspensa agitetur; erunt sicut distantiæ axium oscillationis à centro gravitatis; ita contrariâ ratione distantiæ centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.* C'est-à-dire, que dans le pendule *CB*, la quantité $CA.\ AB$ est constante, ou $AB = \frac{aa}{CA}$, prenant *a* pour une constante, & $C = \frac{A.\ aa}{CA.\ CB} = \frac{A.\ aa}{aa + \overline{CA}^2}$.

Cette force C ne peut pas être infinie, car il faudroit pour cela que $aa+\overline{CA}^2=0$, ou $CA=a\sqrt{-1}$. De plus, C ne peut pas être plus grand que A dans l'état d'équilibre. Car soit $C=nA$, prenant n pour un nombre entier, on aura $n(aa+\overline{CA}^2)=aa$; & $aa(n-1)=-n(\overline{CA}^2)$. Soit $n=2$; donc $aa=-2\overline{CA}^2$, racine imaginaire. Il faut donc chercher un point C de suspension, tel que le moment $C.CB$ soit le plus petit de tous, en supposant C & A constantes. Pour cela, j'égale à zéro la différentielle $dCA+dAB$, ce qui donne $dCA=-dAB$, & prenant la différentielle de l'équation $CA.AB=aa$, j'ai $CA.dAB=-AB.dCA$; & en substituant, il vient $CA=AB$. Le plus petit moment $C.CB$, est donc $2CA$, ce qui donne AB ou $AC=\frac{\overline{AO}^2}{2AB}$. Et faisant $AO=1$, j'ai AC ou $AB=\sqrt{\frac{1}{2}}$. La longueur du pendule CB, est $=\sqrt{2}$. Si l'on faisoit AB plus petit, par exemple, $\frac{1}{2}CA$, on auroit $\overline{CA}^2=1$; & le pendule CB seroit $=\frac{3}{2}>\sqrt{2}$. Si l'on faisoit AB plus grand, par exemple, $=2CA$, on auroit $CA=\frac{1}{2}$, & le pendule $CB=\frac{3}{2}$. Ainsi la longueur $=\sqrt{2}$, est celle du pendule brachystochrone, c'est-à-dire, de celui dont les vibrations sont les plus promtes. Donc le moment trouvé $C\sqrt{2}=A\sqrt{\frac{1}{2}}$, est un moindre.

Ce point de suspension C étant ainsi déterminé, il suit que dans l'équilibre $C:A::\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{2}::1:2$, & que si le poids A de l'Astrolabe est $=2C$, il n'y aura point de rotation autour de B, en supposant cette suspension; au lieu qu'en la faisant varier, on ne trouve l'équilibre que lorsque $CA=0$.

Si le poids A étoit $>2C$, la force C ne pourroit pas l'entraîner, & il n'y auroit point de mouvement de rotation.

rotation. Il faut donc que le poids de l'Astrolabe soit aussi grand qu'il est possible, pour approcher du double de la force C, sans craindre de la surpasser.

Si le poids A est $< 2C$, le centre de rotation B subsistera, & il décrira la courbe déterminée par M. Clairaut, dans les Mémoires de 1736 (Probl. 5, p. 17.) dont l'équation est $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{dz}{m}\sqrt{2gy+2pmm}$, en faisant le sinus total $= 1 = CB$; le sinus de l'angle variable, formé par BC, avec $EC = y$; les constantes $Cc = dz$; la vitesse constante du point $C = m$, la pesanteur $= g$, & p une autre constante. Le premier membre est l'expression de l'angle formé par BC avec bc, ou des deux positions consécutives de cette ligne. Si l'on fait $g = 0$, on trouve que ces angles sont proportionnels aux parties Cc, & que par conséquent cette courbe est une cycloïde. Si dans quelques cas il arrivoit que $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = 0$, c'est-à-dire, que deux positions consécutives de CB, cb fussent exactement paralleles, par exemple, lorsque $y = a$, on auroit la constante $p = -\frac{ga}{mm}$, & l'équation deviendroit $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{dz}{m}\sqrt{2g(y-a)}$, ou $\frac{dy}{\sqrt{1-y.1+y.y-a}} = \frac{dz}{m}\sqrt{2g}$. Le sinus a ne peut pas être $= 1$, ou sinus total, ce qui rendroit le premier membre $= \frac{dy}{(1-y)\sqrt{-1-y}}$ imaginaire. Ainsi le point B ne peut pas décrire une ligne droite parallele à CE. L'angle $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$ est proportionnel à $\sqrt{y-a}$. Donc y ne peut pas être $= 0$, & cet angle ne disparoît que lorsque $y = a$; c'est le *minimum* de l'ordonnée y de cette courbe. C'est dans ce point seul que la vitesse horisontale de B est égale à celle de C; & comme dans ce cas la ligne cb est

oblique à l'horisontale *EC*, la viteſſe de *B* s'accélere par la peſanteur, & le ſinus *y* devient plus grand. Il faudroit donc arrêter promptement cette accélération, ou la diminuer, enſorte qu'elle devint inſenſible. C'eſt ce que fait M. Hughens, par la grandeur du poids, & par le frottement de l'eſſieu.

Fig. VI. n° 2. On fixera donc l'Aſtrolabe *MO* par ſon centre, ſur un eſſieu dont on ne voit qu'une partie *AE*, dans la Fig. VI n°. 2, & qui eſt vû tout entier dans la Fig. VI n° 3. Le point de ſuſpenſion eſt cependant en *C*, à la diſtance requiſe du centre de gravité, à cauſe des coudes *E* & *R* de l'eſſieu. Le plan de cet Aſtrolabe eſt perpendiculaire à l'eſſieu, ou parallele au côté *DAP* du chaſſis qui le soûtient. Ce chaſſis eſt encore ſuſpendu par deux pivots *F* & *G*, en ſorte qu'il tourne librement ſur le pied de fer ou de bois *FHKG*, lequel doit être fixé ſur le plancher du navire, afin qu'il n'ait d'autre mouvement que celui du navire.

L'un des plus grands avantages de cette ſuſpenſion, eſt que l'Aſtrolabe ne peut avoir par ce moyen que deux mouvemens circulaires, l'un autour de l'axe *AB*, & l'autre autour de l'axe *FG*. Mais l'axe *AB* étant mobile autour de l'axe fixe *FG*, le mouvement circulaire, ou la main de l'Obſervateur, fait néceſſairement une impreſſion ſur cet axe *AB*, & le force à tourner en très-peu de tems autour de l'axe *FG*. De-là vient que dans les bouſſoles, où les pinnules ſont toûjours placées dans la direction de l'axe *AB*, on voit toûjours l'aſtre à fort peu près dans le même azymuth, & c'eſt même là le plus grand avantage de la ſuſpenſion des bouſſoles. En effet, le mouvement autour de l'axe *FG*, quelque grand qu'il ſoit, n'empêche pas que les pinnules placées dans l'axe *AB*, ne ſoient toûjours dans le même azymuth, & que par conſéquent l'obſervation

de l'azymuth, ou du rumb de vent ne soit exacte. Il est vrai que le Soleil étant à l'horison, lorsqu'on observe la variation de l'aiguille aimantée, le mouvement de la boussole autour de l'axe *AB*, ne peut pas faire un écart sensible; au lieu que dans les grandes hauteurs des astres, il faut être bien attentif à détruire tout le mouvement de la boussole autour de *AB*, pour ne pas se tromper dans le vrai azymuth.

On voit par expérience, que l'astrolabe roulant autour de l'axe *FG*, ne roule plus autour de l'axe *AB*, quoique ces deux mouvemens ne soient pas contraires, leurs directions étant perpendiculaires l'une à l'autre. Mais on doit attribuer cet effet principalement au poids de l'instrument, & aux frottements de l'essieu *AB*, qui détruisent assez promptement les vibrations de cette espece de pendule.

Il est donc à propos d'augmenter autant qu'il est possible le frottement de l'essieu *AB*, pour faire cesser promptement ses vibrations. Le meilleur moyen pour cela, est, ce me semble, de le suspendre par une ou plusieurs cordes, qui fassent sur cet essieu, un ou plusieurs tours, & qui soient fixées aux deux côtés opposés *FD*, *GP* du chassis. La pression de ces cordes détruira à chaque instant une grande partie de la vibration de l'Astrolabe. Et M. Varignon ayant démontré dans les Mémoires de 1717, que les pressions des cordes sont en raison composée des raisons directes des forces comprimantes, & des longueurs des arcs comprimés, & de la raison inverse des diametres de ces arcs; il suit que plus le poids sera grand, plus la pression sera forte; & que le poids restant le même, le frottement sera proportionnel au nombre des tours de la corde sur le même essieu. On peut donc par ce moyen augmenter le frottement de l'essieu tant qu'on voudra,

& diminuer le nombre des vibrations du pendule.

M. Hughens, dans la description de son Niveau à plomb, a employé l'huile pour arrêter les vibrations du pendule. Il me paroît que la pression d'une corde aura plus de force que cette résistance. Si la corde vient à se secher, elle ne sera pas assez tendue pour arrêter le mouvement du pendule : le remede est facile ; on n'a qu'à la mouiller pour la roidir.

Si l'on vouloit éviter les inconvéniens qui peuvent résulter de la multiplicité des tours d'une corde autour de l'essieu, on pourroit fixer à cet essieu une roue assez épaisse, pour recevoir dans toute sa circonférence, une entaille large & profonde, garnie de pointes de fer courtes & fortes, toutes perpendiculaires à la circonférence. La corde embrasseroit cette entaille hérissée de pointes, & seroit fixée, comme auparavant, aux côtés *FD*, *GP* du chassis.

On voit bien que la pression du poids fera enfoncer les pointes de fer dans les parties inférieures de la corde, & que chaque pointe enfoncée diminuera le mouvement de vibration, en se dégageant difficilement. On pourroit même fortifier l'engrainement des pointes de fer dans la corde, de maniere que le poids ne pourroit pas vaincre le frottement : mais il n'est pas difficile d'éviter cet inconvénient. Cette idée est semblable à celle de M. *Bernoulli*, dans son Mémoire sur le Cabestan, & à celle de M. Hughens, dans son *Horolog. Oscillat. p.* 4, *Fig.* I, où l'on voit cette roulette représentée par les lettres *D D*.

Les Ouvriers, comme le remarque M. Bernoulli, voulant ménager les cordes, qui souffrent beaucoup par cet engrainement, ont abandonné cette roulette, & y ont substitué une entaille qui va en se rétrécissant vers le centre, afin que quand la corde y est une fois admise, elle y

soit comprimée, en sorte qu'elle ne glisse pas aisément sur la circonférence inférieure. On peut même, pour augmenter le frottement, rendre les deux côtés de l'entaille rabotteux, à peu près comme les surfaces des limes.

Pour trouver dans ce cas les rapports du frottement, soit BH le diametre du trou dans lequel l'essieu BG peut rouler, pour faire tourner la ligne inflexible PBC, à laquelle on suppose un poids P attaché. Cette ligne étant fixée à l'essieu, peut représenter l'Astrolabe. Soit B le point d'attouchement de l'essieu contre le cercle BH; transportons le poids P en B par cette analogie, $B : P :: PC : BC$, ou la force $B = \frac{P.PC}{BC}$, & menons la tangente FBA, le mouvement de cette tangente peut représenter celui de l'anneau BH autour de l'essieu. Supposons donc que le plan incliné FBA se meuve autour du point B; menons l'horisontale AD, & la verticale FD, le poids P réuni en B, ne s'écartera pas du point B, tant que le frottement sera supérieur à la pression en B, & à la force qui agit selon BA. Soit le sinus total $FA = 1$, le sinus FD de l'angle $FAD = s$, $PC = a$, $BC = r$, rayon de l'essieu. Prenons la verticale EB pour représenter le poids B, & abbaissons EK perpendiculaire à BC; nous aurons $EB : BK ::$ comme le poids B est à sa pression, comme FA, 1 est à DA, $\sqrt{1-ss}$. Donc la pression en $B = B\sqrt{1-ss}$. Fig VI. n° 4.

Soit le rapport de la pression au frottement, comme r est à f, qui est, selon les expériences de M. Amontons, comme 3 est à 1. Nous aurons le frottement en $B = fB\sqrt{1-ss}$. L'effort du poids B, pour descendre le long du plan incliné FA, est au poids B comme FD, s est à FA, 1; cet effort est donc $= Bs$, ou $= \frac{aPs}{r}$, puisque B

$= \frac{P.PC}{BC}$. Soit A la force qui agit ſelon la direction BA, en vertu de l'accélération acquiſe au point B ; cette force jointe à l'effort $\frac{aPs}{r}$, doit être égale au frottement $fB\sqrt{1-ss}$ dans l'état d'équilibre. Donc $A = fB\sqrt{1-ss} - \frac{aPs}{r} = \frac{aP}{r}(f\sqrt{1-ss} - s)$. Si l'on fait $s = \frac{f}{\sqrt{1+ff}}$, cette force diſparoît, & le poids B ou $\frac{aP}{r}$ ſe ſoûtient par ſon ſeul frottement.

Si le rapport de la preſſion au frottement étoit conſtant, comme l'a cru M. Amontons, ou comme 3 à 1, f ſeroit une quantité conſtante $= \frac{1}{3}$, & l'on auroit $s = \frac{1}{\sqrt{10}}$, ce qui ne peut convenir qu'à certains cas, où le poids P eſt fort petit. La quantité f n'eſt donc pas conſtante, & il eſt très-vraiſemblable que le frottement eſt en raiſon compoſée de la preſſion & de la ſurface preſſée, la quantité f renferme donc l'étendue de la ſurface preſſée. Soit x cette ſurface, & $f = nx$; le ſinus de l'angle d'équilibre ſera donc $s = \frac{nx}{\sqrt{1+nnxx}}$; & comme la ſurface B dans le cas préſent, n'eſt preſque qu'un point ou une ligne, en la prenant phyſiquement, il arrivera que le pendule ne fera qu'un angle très-petit avec la verticale dans le cas d'équilibre.

Si l'on veut connoître la force F, capable d'élever le poids B dans la direction BF, on trouvera qu'elle doit ſurmonter l'effort du poids B & ſon frottement. Donc $F = \frac{aP}{r}(f\sqrt{1-ss} + s)$, lorſqu'elle eſt ſur le point d'enlever le poids B. Le *maximum* de cette quantité donne $s = \frac{1}{\sqrt{1+ff}}$, ou $= \frac{1}{\sqrt{1+nnxx}}$, & $F = \frac{aP}{r}\sqrt{1+nnxx}$.

Lorſque $x = 0$, $s = 1$, & $F : P :: PC : BC$, c'eſt en

effet le cas où la tangente FA eft verticale, & où il faut un très-grand effort pour foûtenir le pendule. Lorfque $s = 0$, la force F pour enlever le poids eft $\frac{aPf}{r}$ plus petite que dans l'autre cas, f étant une fonction. Elle feroit nulle fi le frottement étoit nul, ou fi $nx = 0$.

De-là il fuit que fi la quantité f ou nx proportionnelle au frottement, étoit fort grande, il faudroit un très-grand effort F pour enlever le poids P, & qu'ainfi on doit augmenter le frottement autant qu'il eft poffible, pour empêcher les vibrations de l'Aftrolabe. Les tours de corde, l'entaille, les pointes dont nous avons parlé, augmentent beaucoup nx.

Il femble que fi $r = 0$, la force F feroit infinie; mais alors on auroit auffi $f = 0$, & ce cas eft contraire à la fuppofition de la ligne FBA, tangente au cercle BG. Il eft vrai que plus r eft petit, plus F feroit grand, fi f étoit conftant; mais on doit remarquer que r diminuant, f diminue; au lieu que f ou nx peut diminuer fans rien changer à r. Ainfi la difficulté F augmente en raifon compofée du poids P, de la longueur PC, & de $nx\sqrt{1-ss}+s$; ou en fuppofant $s = 0$, cette difficulté augmente, en raifon compofée du poids du levier PC, & du frottement nx.

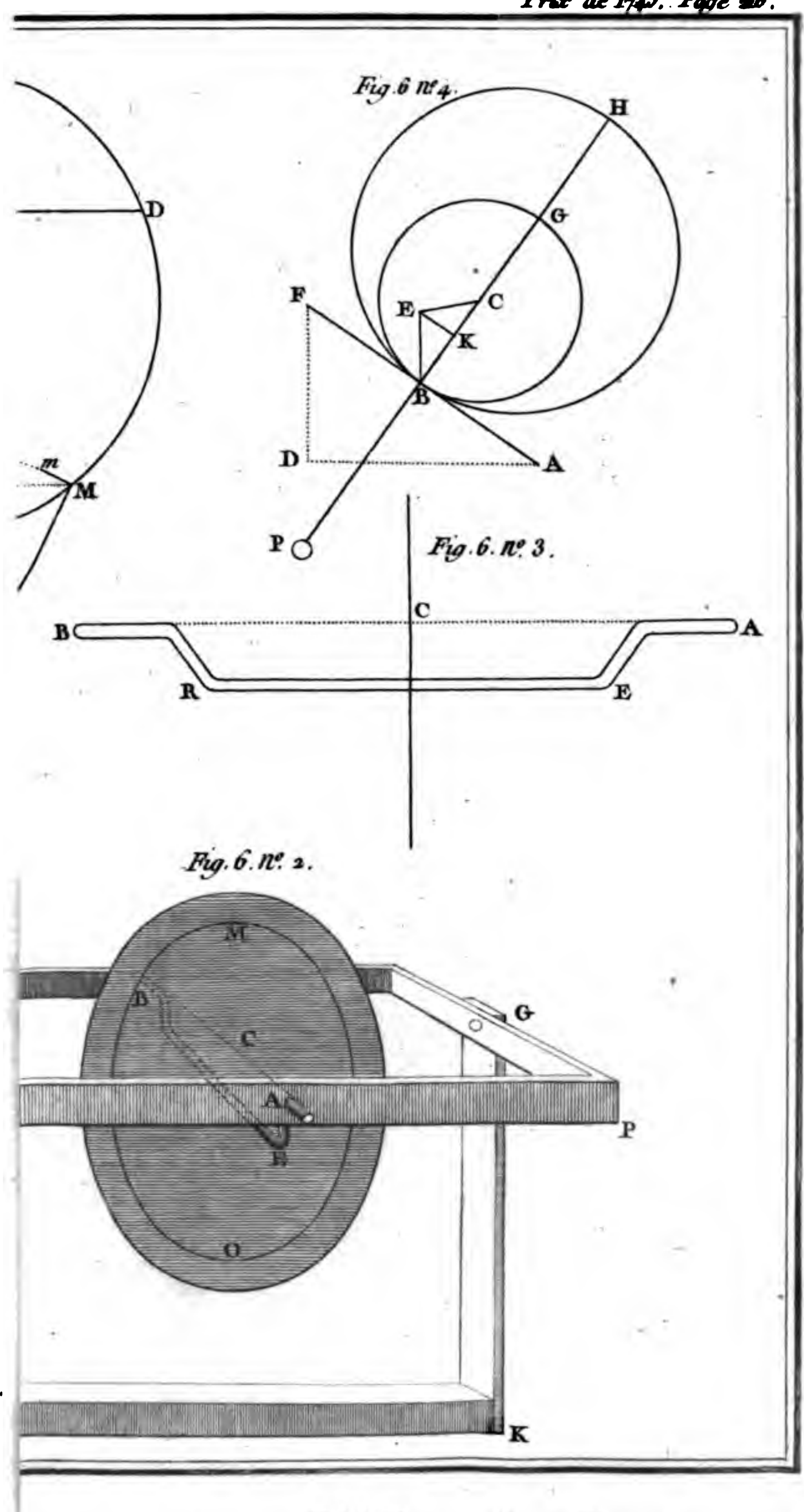
Enfin, fi l'on vient à bout de fufpendre l'Aftrolabe, en forte qu'il ne puiffe rouler que très-difficilement autour de l'axe BA, il ne roulera plus qu'autour de FG, par des vibrations qui le feront incliner vers la ligne FK; & dans ce cas, l'erreur dans l'obfervation de la hauteur des aftres fera très-petite. On pourra même l'éviter, en choififfant la plus petite hauteur de toutes celles que l'inftrument pourra donner dans fes différentes inclinaifons, comme je l'ai démontré à la fin de l'article fecond de la premiere Partie.

Les mêmes principes appliqués à l'Article III, servent à rectifier le Compas de variation, pour le rendre propre à observer l'azymuth des astres.

Je ne dois pas oublier une précaution que l'on doit prendre, pour fixer en tout tems les bouſſoles & autres inſtrumens à plomb : c'eſt d'avoir des poids de rechange beaucoup plus grands que les poids ordinaires, pour les accrocher à l'inſtrument dans un gros tems. Un bon Marin m'a aſſûré, que par ce moyen, il avoit toûjours fixé la bouſſole dans les tems les plus orageux, tandis que les autres bouſſoles du navire étoient dans des agitations continuelles.

Si la direction du ſillage eſt perpendiculaire au plan de l'inſtrument, elle ne lui donne aucun mouvement autour de l'axe *BA*, mais ſeulement autour de *FG* ; & ce cas a été prévû ci-devant. Si elle eſt oblique, on peut la décompoſer en deux, l'une parallele, & l'autre perpendiculaire au plan de l'inſtrument. Ce qui renferme tous les cas.

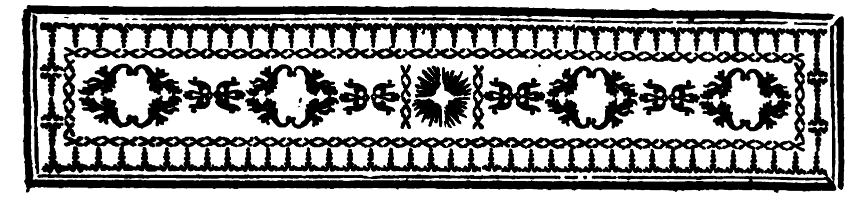



Fig. 6 n° 4.
H
G
D
F
E
C
K
B
D
A
m
M
P
Fig. 6. n° 3.
C
B
A
R
E
Fig. 6. n° 2.
M
B
C
G
A
P
E
O
K

ESSAI
D'HOROLEPSE
NAUTIQUE.

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

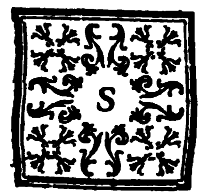
Terricola heu prorsus sum inglorius; ô ubi pontus
Et naves? O qui molis me in vertice sistat,
Aëriæ cœlique vias & sidera monstret?



ESSAI D'HOROLEPSE NAUTIQUE.

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

Terricola heu prorsus sum inglorius ; O ubi pontus
Et naves ! O qui molis me in vertice sistat
Aëriæ, cœlique vias & sidera monstret !



SI j'ose essayer d'écrire quelques pages sur le Problème proposé par l'Académie Royale des Sciences, pour sujet du Prix de l'année 1745, ce n'est pas que je me flate de pouvoir montrer *la meilleure maniere de trouver l'heure en mer par observation*, &c. en quoi consiste ce Problème, ni même d'être capable d'en approcher assez pour mériter quelque distinction à cette Piece. C'est aux personnes versées dans la Marine & dans l'Astronomie, qu'il appartient seulement de traiter ce sujet avec certaine confiance. Pour moi, qui loin d'avoir aucun usage de

la navigation & des observations célestes, n'ai jamais vû ni Mer, ni Marins, ni Observatoire, ni Instrumens, ni Astronomes, je sens parfaitement qu'il ne me convient point de donner des leçons, mais plutôt d'en recevoir sur un tel sujet. Aussi n'a-ce été que par occasion & pour m'exercer d'après l'ouvrage d'un fameux Maître, que j'ai pensé au Problème dont il s'agit ; & je n'y ai pensé que fort tard, en sorte que je suis resserré dans un espace de tems très-court, pour mettre au net ma tentative. C'est une déclaration dont je me crois obligé de prévenir l'Académie, en prenant la liberté de lui présenter ces feuilles, afin que Messieurs les Commissaires qui verront celles-ci, puissent s'épargner la peine d'aller plus avant, s'ils le jugent à propos. Que s'ils veulent bien se la donner (ce qui est le principal souhait que j'ose former, & ce que je demande comme une grace), j'espere que la déclaration que je viens de faire, pourra engager ces Messieurs à voir mon Essai avec l'indulgence dont je sens qu'il a besoin.

Une autre déclaration que j'ai à faire, c'est qu'étant très-peu fourni de livres d'Astronomie & d'Hydrographie, j'ignore si certaines choses ont été dites, ou par qui elles l'ont été. Ainsi je pourrai tomber, mais malgré moi, dans le double inconvénient de m'arrêter, sans citer personne, sur des points qui auront peut-être été expliqués ailleurs, & mieux expliqués qu'ils ne seront ici. Si j'y tombe, j'espere que cet aveu de mon défaut d'érudition me servira d'excuse. Au reste, je ne manquerai point de citer dans l'occasion, les Ouvrages que j'ai entre les mains, & dont j'emprunterai quelque chose.

Je divise cet Essai en trois Parties. Dans la premiere, j'exposerai divers moyens Astronomico-Algébriques, de trouver l'heure en prenant ce Problème en général, & abstraction faite des circonstances. Dans la deuxieme,

j'indiquerai quelques opérations graphiques subsidiaires, à l'usage des Formules de la premiere Partie, & plus faciles : je marquerai aussi des moyens de simplifier dans certains cas les calculs algébriques, &c. Enfin je me propose de parler dans la troisieme Partie, du choix qu'il est à propos de faire entre les diverses sortes d'observations, & d'en parler tant en général, que relativement aux circonstances particulieres énoncées dans le Programme de l'Académie. Je tâcherai aussi de dire quelque chose sur les moyens de faire les observations requises.



PREMIERE PARTIE.

Moyens Astronomico-Algébriques de trouver l'heure, ou usage de l'Algebre pour trouver l'heure, certaines observations étant supposées.

LE mouvement journalier de la terre autour de son axe, fait paroître le ciel & tous les astres, comme emportés circulairement en sens contraire, parallelement à l'équateur, autour des points du ciel que l'axe de la terre prolongé rencontre ; & cette rotation de la terre, qui par par son uniformité est la mesure du tems, fait aussi que les astres changent continuellement, tant d'Azymuth, que d'almicantarath. Or elle les en fait changer différemment, selon que l'un des poles est plus ou moins élevé sur l'horison du lieu, & selon leur diverse distance à ce point. Il y a donc de certaines relations entre l'élevation du pole, le moment d'une observation, la déclinaison d'un astre, sa hauteur & son angle azymuthal. En effet, trois de ces choses étant données, chacune des deux autres est déterminée, & peut être trouvée.

C'est à quoi l'on emploie communément la *Trigonométrie* sphérique, mais l'algebre peut aussi y être employé, & avec avantage. M. Bouguer nous a donné un exemple de l'application de cette science générale aux questions Astronomiques, dans l'excellente Piece qui a remporté le prix de l'Académie de 1731, Piece qui a pour sujet : *La Méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole* : & les formules de cette Piece sont très-commodes : mais destinées à porter la lumiere sur certains détails,

elles ne correſpondent pas à toutes les queſtions que j'ai indiquées. M. de Maupertuis s'étant propoſé un objet plus général, les a embraſſées algébriquement toutes ces queſtions, dans le livre élégant qu'il a publié depuis peu, ſous le titre d'Aſtronomie Nautique. Rien ne fait mieux ſentir les relations des cinq choſes dont il s'agit, que les cinq premiers problèmes de ce livre. Je vais les tranſcrire ici à titre de Lemme, en y joignant quelques Scholies, parce que les formules qui en réſultent, ſont le principal fondement de ce que j'ai à dire dans cette Partie. Les expreſſions des divers ſinus, employées par M. de Maupertuis, étant très-bien choiſies, je me fais un devoir de les conſerver. Je m'étendrai un peu plus & dans ce Lemme & dans la ſuite, que n'a fait cet illuſtre Académicien: mais ſi je m'écarte en cela de l'exemple qu'il nous a donné, ce n'eſt pas que je ne ſente combien grand eſt le mérite de la briéveté, & que je ne déſiraſſe de me rendre concis, ſi je le pouvois être ſans inconvénient; mais les circonſtances ne paroiſſent pas me le permettre. Qu'un Sçavant du premier rang ſoit extremement concis, qu'il ſupprime ou omette certains points dans un Ouvrage, il ſçait à quelles perſonnes & à quel uſage il le deſtine réellement; d'ailleurs on ne peut le ſoupçonner de n'avoir pas fait attention à ce qu'il omet, encore moins de l'ignorer; ſon Ouvrage, par de tels retranchemens, ne paroît que plus élégant & plus fort de choſes, que plus agréable par conſéquent à ceux qui ſont capables de l'entendre ſans peine. Mais ſi un foible Ecrivain ne diſoit pas tout ce que ſon ſujet comporte, ſans compter qu'il pourroit paſſer pour dépourvû de la connoiſſance de ce qu'il omettroit, ne s'expoſeroit-il point au danger de négliger imprudemment quelque choſe d'utile & même d'important? C'eſt pour mon propre beſoin que je ſuis entré dans

certains détails, en étudiant mon sujet. Je crois donc pouvoir les insérer ici, d'autant plus que si cet écrit devenoit public, il s'adresseroit à des personnes, qui, jusqu'à présent, n'ont pas été obligées de s'appliquer beaucoup à l'algebre, & qui sont chargées de plusieurs autres occupations pressantes. C'est aux seuls Navigateurs que je dois être censé parler. Peut-on trop faciliter les matieres aux personnes de cet ordre? Ce sont des pratiques qu'il s'agit de proposer. Peut-on trop s'appliquer à prévenir les méprises qui pourroient s'y glisser? Enfin, & cette derniere raison est forte, je ne serois presque que Copiste dans cette partie, si je me resserrois autant que l'Auteur original que je vais suivre.

LEMME PREMIER.

Touchant les relations entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, sa hauteur & son Angle azymuthal, ces choses étant prises quatre à quatre.

PREPARATION ET DÉNOMINATION des principaux élémens de la Sphere.

SOIENT (*Fig.* 1. 2. 3. & 4.) *Pp* l'axe de la sphere céleste; *PZAHpzahP* le méridien, & *HMXh* l'horison du lieu; *AeXa* l'équateur; *DEd* le cercle que décrit l'astre; *PEep* le méridien, ou cercle horaire qui passe au point *E*, où l'astre se trouve; *ZEMz* son azymuth, & *LEl* son almicantarath.

Soit le rayon *CP* nommé *r*.

Le sinus *CB* de la déclinaison de l'astre nommé... *x*; son cosinus *DB*, *y*.

Le sinus *PQ* de la hauteur du pole............ *s*; son cosinus *CQ*, *c*.

Le

Le sinus CG de la hauteur de l'astre . . . . h; son cosinus GE, k.

Le sinus ef de l'angle horaire . . . . t, son cosinus fc, u.

Le sinus MN de l'angle azymuthal . . . . m; son cosinus NC, n.

On aura (à cause de la similitude des triangles PQC & CBO) $CO = \frac{rx}{s}$, & $BO = \frac{cx}{s}$. De plus (à cause des arcs correspondans des cercles DEd & $AeXa$, LEl & $HMXh$), on aura $BF = \frac{yu}{r}$, $GF = \frac{nk}{r}$, & $EF = \frac{yt}{r} = \frac{mk}{r}$, d'où résulte $yt = mk$, cinquieme formule de l'Astron. Nautique, où n'entre point la hauteur du pole.

§. I. *Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur & son Angle horaire.*

GO (*Fig.* 1.) $= GC - CO = \frac{hs - rx}{s}$; & les triangles semblables PQC & FGO donnant $c : r :: \frac{hs - rx}{s} : OF = \frac{rhs - rrx}{cs}$, on a (à cause de $BO + OF = BF$) $\frac{ccx + rhs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r}$, ou (à cause de $cc - rr = - ss$) $rrh - rsx = cyu$; premiere Formule.

SCHOLIE. dans la *Fig.* 2. $GO = CO - GC$, $BF = BO - OF$, & l'on trouve les mêmes signes pour cette formule: mais ils sont différens dans les deux autres cas. Dans celui de la *Fig.* 3. où l'astre est situé au-dessous du cercle de six heures, on a $GO = CO - GC = \frac{rx - hs}{s}$, donc $OF = \frac{rrx - rhs}{cs}$; $BF = OF - BO$, donc $\frac{yu}{r} = \frac{rrx - rhs - ccx}{cs}$, & parce que $rr - cc = ss$, on a enfin $rsx - rrh = cyu$. [C'est le cas indiqué dans la note qui est

au bas de la page 4 de de l'Astronomie Nautique.]

Dans le cas de la *Fig.* 4, où l'astre est situé au-dessous de l'équateur, on a $GO = GC + CO = \frac{hs + rx}{s}$, donc $OF = \frac{rhs + rrx}{cs}$, on a encore $BF = OF - BO$, donc $\frac{yu}{r} = \frac{rhs + rrx - ccx}{cs}$, ou (à cause de $rr - cc = ss$) $rrh + rsx = cyu$.

§. II. *Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur & son Angle azimuthal.*

Les triangles semblables PQC, FGO, donnent $s : c :: \frac{nk}{r} ; GO = \frac{nck}{rs}$. Donc (à cause de $CO + OG = CG$ Fig. 1.) $\frac{rrx + nck}{rs} = h$, ou $rrx + nck = rsh$, deuxieme formule.

SCHOLIE. Les signes de cette formule sont différens dans les cas des trois autres Figures. Dans ceux des *Fig.* 2. & 3. sçavoir lorsque l'astre est situé de la même part du premier vertical que le pole est élevé, soit au-dessus, soit au-dessous du cercle de six heures, on a $CO - OG = CG$; donc $rrx - nck = rsh$. [Le second de ces cas est le seul qui soit indiqué dans la note qui vient d'être citée.]

Dans le cas de la *Fig* 4, qui est celui où l'astre est situé au-dessous de l'équateur, on a $OG - CO = CG$; donc $nck - rrx = rsh$.

§. III. *Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azimuthal.*

Les triangles semblables MNC, EFG, donnent, $m : n :: \frac{ys}{r} : FG = \frac{nys}{mr}$; les triangles PQC, FGO, don-

nent $s::r::\frac{nyt}{mr}:FO=\frac{nyt}{ms}$; donc (à cauſe de $FO+OB$ $=FB$, Fig. 1.) $\frac{nyt+mcx}{ms}=\frac{yu}{r}$, ou $rnyt+rmcx=msyu$; troiſieme formule.

SCHOLIE. Les ſignes de cette formule ſont encore différens pour les cas des trois autres Figures. Dans la *Fig.* 2, on a $OB-FO=FB$, donc $rmcx-rnyt=msyu$.

Dans les cas des *Fig.* 3. & 4, ſçavoir lorſque l'aſtre eſt au-deſſous ſoit du cercle de ſix heures, ſoit de l'équateur, on a $FO-OB=FB$, donc $rnyt-rmcx=msyu$.

§. IV. *Relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azimuthal.*

Les triangles ſemblables PQC, FGO, donnent $s:r::\frac{nk}{r}:FO=\frac{nk}{s}$; $s:c::\frac{nk}{r}:GO=\frac{nkc}{rs}$, & $CO(=CG-OG$ Fig. 1.) $=\frac{rsh-nkc}{rs}$. Les triangles PQC, CBO, donnent $r:c::\frac{rsh-nkc}{rs}:OB=\frac{rsch-nkcc}{rrs}$; or (à cauſe des arcs correſpondans des cercles DEd, $AIXa$), on a FB $(=FO+OB$, même Fig.); EF ou $\frac{nkrr+rsch-nkcc}{rrs}:\frac{mk}{r}::u:t$; donc (à cauſe de $rr-cc=ss$) $rcht+nkst=rmku$; quatrieme formule.

SCHOLIE. Les ſignes de cette formule ſont les mêmes dans le cas de la *Fig.* 4, où l'on a $CO=GO-GC$, & $FB=FO-OB$.

Dans le cas de la *Fig.* 2, on a $CO=CG+GO$ $=\frac{rsh+nkc}{rs}$, & $OB=\frac{rsch+nkcc}{rrs}$; de plus, on a $FB=BO$ $-OF=\frac{-nkrr+rsch+nkcc}{rrs}$; donc $-nkst+rcht$ $=rmku$.

Enfin dans le cas de la *Fig.* 3, on a pareillement

$CO = CG + GO$, & $OB = \frac{rsch + nkcc}{rrs}$; mais on a d'ailleurs $FB = FO - OB = \frac{nkrr - rsch - nkcc}{rrs}$; donc $nkst - rcht = rmku$.

REMARQUE. On peut aisément reconnoître que tous les cas les moins simples de la situation d'un astre, sont exprimés dans les quatre Figures mentionnées ci-dessus, [dont la premiere est la seule qu'on voie dans l'Astronomie Nautique.] Car où l'astre est du côté du premier vertical, opposé à celui où est le pole élevé, & alors ou il est au-dessus de l'équateur *Fig* 1. ou au-dessous *Fig*. 4. Et s'il est du côté du premier vertical, où est le pole élevé, il est ou au-dessus du cercle de six heures, *Fig* 2, ou au-dessous, *Fig*. 3. On peut encore reconnoître cela autrement, & remarquer en même tems quelques différences des quatre Figures; car les triangles semblables BOC, FOG, sont ou opposés par la pointe, & c'est le cas de la *Fig*. 1, ou couchés l'un sur l'autre; & alors ou bien le côté BO du premier est plus grand que l'hypothenuse FO du second (& à plus forte raison CO, hypoth. du premier, est plus grande aussi que le côté GO du second), c'est le cas de la *Fig*. 2; ou bien au contraire, l'hypoth. CO du premier est plus petite que le côté GO du second (& à plus forte raison le côté BO du premier est aussi plus petit que l'hypothenuse du second), & c'est le cas de la *Fig*. 4, ou enfin chacune des hypothenuses surpasse le côté de l'autre triangle couché sur elle, & c'est le cas de la *Fig*. 3.

On peut aussi observer que chacune des quatre formules reçoit seulement trois combinaisons de signes, & que dans un de ses états, elle répond à deux Figures : & il est aisé de voir, surtout à l'égard de trois formules, que cela doit être ainsi. Car dans la premiere, où on laisse à part

l'angle azymuthal, il eſt indifférent que le coſinus de cet angle puiſſe être pris poſitivement ou négativement. Cette formule doit avoir les mêmes ſignes, ſi les autres ſinus ou coſinus qui y entrent ſont placés du même côté; c'eſt-à-dire, qu'il n'importe que l'aſtre ſoit de part ou d'autre du premier vertical, lorſqu'il eſt entre l'équateur & le cercle de ſix heures, *Fig* 1. & 2; parce que dans l'une & l'autre Figure, le coſinus de l'angle horaire eſt de même part du cercle de ſix heures; & le ſinus de la déclinaiſon auſſi de même part de l'équateur. Dans la deuxieme formule, où on laiſſe à part l'angle horaire, il eſt indifférent quelle poſition ait le coſinus de cet angle; la même combinaiſon des ſignes doit ſe trouver dans cette formule, ſi les ſinus ou coſinus qu'elle renferme ont les mêmes poſitions. Ainſi il n'importe que l'aſtre ſoit de part ou d'autre du cercle de ſix heures, lorſqu'il eſt du côté du premier vertical où ſe trouve le pole élevé, *Fig*. 2. & 3, parce que dans l'une & l'autre ſituation de l'aſtre, le coſinus de l'angle azymuthal eſt placé du même côté du premier vertical, & le ſinus de la déclinaiſon, auſſi du même côté de l'équateur. Dans la quatrieme formule, où on laiſſe à part la déclinaiſon de l'aſtre, il n'importe qu'elle ſoit Septentrionale ou auſtrale; les termes de cette formule doivent être affectés des mêmes ſignes*, lorſque l'aſtre eſt au-deſſus ou au-deſſous de l'équateur, *Fig* 1. & 4, parce que le coſinus de l'angle horaire tombe du même côté du cercle de ſix heures, & le coſinus de l'angle azymuthal du même côté du premier vertical, dans l'un & l'autre cas. Enfin dans la troiſieme formule (où on laiſſe à part la hauteur de l'aſtre), il eſt indifférent que l'aſtre ſoit au-deſſous du cercle de ſix heures, *Fig* 3, ou au-deſſous de l'équateur, *Fig*. 4 : il ſe fait pour ces cas une compenſation, parce que les trois ſinus

x, u, n, qui entrent dans la formule, ont dans l'un de ces cas une position toute contraire à celle qu'ils ont dans l'autre cas.

LEMME SECOND,

Touchant la relation du sinus de la somme, ou de la différence de deux Angles ou de deux Arcs aux sinus & cosinus de ces Angles ou Arcs.

1°. Le produit du sinus de la différence de deux angles aigus par le rayon, est égal à la différence du produit du sinus du plus grand de ces angles, par le cosinus du moindre, & du produit du sinus de celui-ci, par le cosinus de celui-là. 2°. Le produit du sinus de la somme de deux angles aigus par le rayon, est égal à la somme des produits du sinus de chacuns d'eux, par le cosinus de l'autre.

Soient, par exemple, eCX, εCe, deux angles aigus, dont εCX soit ou la différence, *Fig.* 5. & 6, ou la somme, *Fig.* 7. & 8. * Du point C, pris pour centre, soit décrit le cercle quelconque $Ae\varepsilon Xa$, ou $A\varepsilon eXa$, &c. Des points e, ε, soient menées sur XC, prolongée s'il le faut, les perpendiculaires eg, $\varepsilon\gamma$, & encore du point ε, εK, perpendiculaire sur Ce; on aura eg, Cg pour sinus & cosinus de l'angle eCX; εK, CK pour sinus & cosinus de l'angle εCe, & $\varepsilon\gamma$ pour sinus de l'angle εCX. Je dis donc que $\varepsilon\gamma \times Ce = \pm eg \times CK \mp \varepsilon K \times Cg$, *Fig.* 5. & 6, ou $+ eg \times CK + \varepsilon K \times Cg$, *Fig.* 7. & 8.

DÉMONSTRATION. Soit prolongée εK jusqu'à la

* Dans le cas de cette *Fig.* 8, où la somme εCX des angles eCX, εCe est un angle obtus, on peut considérer au lieu de cet angle, εCx qui en est le supplément à deux droits.

rencontre de CX en I, ce qui donne $\epsilon I = \pm IK \mp \epsilon K$, *Figures* 5 & 6, ou $+ IK + \epsilon K$, *Figures* 7 & 8, on aura de plus, trois triangles rectangles semblables, $\epsilon\gamma I$, CKI, Cge, puisque le premier a un angle aigu commun avec le second en I, & que le second a son autre angle aigu en C, commun avec le troisieme. On a donc (en comparant ceux-ci) $Cg : eg :: CK : IK = \frac{eg \times CK}{Cg}$; & (en comparant le premier triangle avec le troisieme).... $Cg : Ce :: \epsilon\gamma : \epsilon I = \frac{\epsilon\gamma \times Ce}{Cg}$. Donc $\frac{\epsilon\gamma \times Ce}{Cg} = \pm \frac{eg \times CK}{Cg} \mp \epsilon K$ ou bien enfin $\epsilon\gamma \times Ce = \pm eg \times CK \mp \epsilon K \times Cg$. Ce qu'il falloit démontrer.

3°. & 4°. Soient eCX, ϵCe, deux angles obtus, dont ϵCx soit ou la différence, *Fig.* 9 & 10, ou la somme; ou, si l'on veut, le supplément à quatre droits, *Fig.* 11 & 12. La formule des cas précédens a encore lieu, parce que les angles obtus ont les mêmes sinus que les angles aigus, dont ils sont les supplémens à deux droits. Les termes de la formule sont affectés des mêmes signes, *Fig.* 9 & 10, que *Fig.* 5 & 6, & *Fig.* 11 & 12 que *Fig.* 7 & 8; il est visible en effet, à l'inspection des *Fig.* 9 & 10, qu'on y a $\epsilon I = \pm IK \mp \epsilon K$, &c. Ces derniers cas pourroient être exprimés autrement, en considérant l'angle ϵCX, qui est ou la somme, *Fig.* 9 & 10, ou la différence, *Fig.* 11 & 12 de deux angles eCX, ϵCe, l'un aigu & l'autre obtus.

COROLLAIRE, ou autre exemple. Soit ACa (mêmes Figures) perpendiculaire au diametre XCx; Cg sera le sinus de l'angle eCA, ou eCa; eg en sera le cosinus, & $C\gamma$ sera le sinus de l'angle ϵCA ou ϵCa, qui est la somme ou la différence de ce premier angle & de ϵCe. Pour abréger, soit le rayon Ce nommé r, comme ci-devant; Cg ou bien ef, nommé pareillement t, & eg ou Cf, u. Soit

aussi $C\gamma$ nommé t'; $\iota\gamma$, u'; ιK, p; CK, q; (d'où résulte $ru' = \pm qu \mp pt$, pour expression de l'exemple précédent) on aura $rt' = + qt + pu$, *Fig.* 5, 6, 9 & 10, parce que dans les deux premieres ιCA est la somme de deux angles aigus eCA, ιCe; & dans les deux autres ιCa est la somme ou le supplément à quatre droits de deux angles obtus eCa, ιCe. On aura encore $rt' = - qt + pu$, *Fig.* 7 & 11, ou $= + qt - pu$, *Fig.* 8 & 12, parce que ιCA, *Fig.* 7 & 8, est la différence de deux angles aigus, & dans les deux autres, ιCa est la différence de deux angles obtus, eCa, ιCe.

Par les mêmes raisons on aura :

$$rp = \left\{\begin{matrix} + \\ + \\ - \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t'u \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix} \left\{\begin{matrix} - \\ + \\ + \end{matrix}\right\} \begin{matrix} tu' \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \textit{Fig. } 5 \text{ \& } 9. \\ \textit{Fig. } 6,\ 7,\ 10 \text{ \& } 11. \\ \textit{Fig. } 8 \text{ \& } 12, \text{ \&c.} \end{matrix}\right.$$

[L'Auteur de l'Astronomie Nautique fait un grand usage de divers cas de ce Lemme, mais sans l'avoir énoncé, & sans avertir de l'espece du cas dont il se sert. Je me souviens d'avoir vû le même Lemme employé dans le Traité de la Manœuvre des Vaisseaux de M. Bernoulli.]

SCHOLIE. Il suffiroit de donner aux termes de chacune des formules précédentes une des trois combinaisons de signes que l'on vient de voir qu'elles peuvent recevoir, si on l'entendoit bien dans cet état, & que l'on eût attention à l'appliquer à propos. Soit proposée la formule du premier exemple ci-dessus, dans l'état $+ \iota\gamma \times Ce = + eg \times CK - \iota K \times Cg$, ou bien $+ ru' = + qu - pt$, qui est l'expression simple & naturelle du cas de la *Fig.* 5. Si l'on passe au cas des *Fig* 7 & 8, où le sinus EK (p) est situé relativement à Ce, dans un sens contraire de ce qu'il est *Fig.* 5, & où par conséquent ce sinus est négatif; si on la

le regarde comme positif dans la *Fig.* 5, le signe — dont le terme pt du second membre de la formule proposée est affecté, se réduit à marquer l'addition de ce terme, parce que le retranchement d'un produit négatif équivaut à l'addition de ce même produit, pris positivement. Si l'on se trouve dans le cas de la *Fig.* 6, où le sinus ' K est situé de la même part de Ce que dans la *Fig.* 5, mais où le sinus ' γ (u') est situé d'autre part de CX que dans cette Figure, & où ce sinus est négatif; par conséquent, s'il est supposé positif, dans la *Fig.* 5, les signes du second membre de la formule conservent leur signification simple; mais le signe + dont est affecté le premier membre ru' de cette formule, indique réellement la négation de ce membre, parce que la position d'une quantité négative est la même chose que la négation de cette quantité, prise positivement; on a donc effectivement & simplement, *Fig.* 6, $-ru' = qu - pt$, expression qui équivaut à celle ($ru' = -qu + pt$) qui a été employée ci-dessus pour le cas de cette *Fig.* 6.

Quant aux cas des *Fig.* 9, 10, 11 & 12, il faut remarquer en général que le cosinus CK (q) de l'angle ' Ce y est situé en sens contraire de ce qu'il est dans les quatre Figures précédentes; différence de situation, qui provient, comme il est visible, de ce que l'angle ' Ce est aigu dans les cas de ces Figures-ci, & obtus dans les autres. Par conséquent le cosinus q est négatif dans les cas des *Fig.* 9, 10, 11 & 12, si on le suppose positif dans les cas précédens, & il rend négatif le produit où il entre en degré impair. * Or, la position d'une quantité négative équivaut à la négation de cette même quantité entendue positivement: donc le signe + qui affecte le terme qu du

* Cette remarque aura encore quelque usage dans la suite.

ſecond membre de la formule, ſe réduit à marquer le retranchement de ce terme.

Si donc on ſe trouve dans le cas des *Fig.* 11 & 12; où le ſinus $\cdot K$ (p) eſt ſitué du même côté de Ce que dans la *Fig.* 5; mais où le ſinus $\cdot\gamma$ (u') eſt d'autre part de CX que dans cette *Fig.* 5, & négatif par conſéquent, le ſigne (—) du terme pt du ſecond membre de la formule conſerve ſa ſignification ſimple, mais le ſigne du premier membre marque en effet une négation, de même que celui du terme qu du ſecond membre. Ainſi on a effectivement & ſimplement pour ce cas, $-ru' = -qu - pt$, expreſſion qui équivaut à celle ($ru' = qu + pt$) qui a été employée ci-deſſus pour ce cas. Dans le cas de la *Fig.* 10, où au contraire c'eſt le ſinus $\cdot K$ (p) qui eſt autrement ſitué que dans la *Fig.* 5 à l'égard de Ce, & où $\cdot\gamma$ eſt ſitué de même part de CX que dans cette Figure. C'eſt le ſigne du premier membre de la formule, qui retient ſa ſignification naturelle, & le ſigne (—) du terme pt du ſecond membre de cette formule, étant expoſé à un produit négatif, indique réellement l'addition de ce produit pris poſitivement. Donc en un mot, chaque ſigne du ſecond membre de la formule propoſée, marque le contraire de ſa ſignification naturelle. Enfin dans le cas de la *Fig.* 9, chacun des ſinus u' & p étant ſitué en ſens contraire de ce qu'il eſt *Fig.* 5, les ſignes des termes ru' & pt de la formule doivent être changés en leurs contraires, auſſi-bien que celui du terme qu, ce qui donne $-ru' = -qu + pt$, ou bien aucun des trois ſignes ne doit être changé; car l'une de ces manieres eſt équivalente à l'autre.

J'expliquerai plus bas, ce que j'entens par l'application *juſte* d'une formule.

AVERTISSEMENT.

QUELQUES-UNES des Formules du premier Lemme, donnent le moyen de découvrir, non-feulement l'heure par l'obfervation d'une étoile, mais auffi la déclinaifon de cette étoile avec la hauteur du pole. Cependant comme il ne s'agit ici que des befoins nautiques, je fuppoferai dans cette Partie, que la déclinaifon des étoiles eft connue, & que celle des planetes, quoique variable, l'eft auffi. Car *on a par les catalogues d'étoiles, leur déclinaifon avec plus de précifion qu'il n'eft néceffaire pour* les befoins du Navigateur; ainfi *dès qu'on connoît fur mer l'étoile qu'on obferve*, il eft inutile de chercher fa déclinaifon; *& fi l'on vouloit fe fervir d'une étoile qu'on ne connût pas, on feroit expofé à des méprifes bien dangereufes*, fuivant la remarque de M. de Maupertuis. D'ailleurs les méthodes de trouver l'heure concurremment avec la déclinaifon d'une étoile, & la hauteur du pole, font en petit nombre, compliquées, & fuppofent que l'Obfervateur eft dans un lieu fixe, ou demandent que l'on faffe certaines corrections aux obfervations. A l'égard de la déclinaifon des planetes, je crois qu'on peut l'avoir, ainfi que leur afcenfion droite, avec une précifion fuffifante, par les Ephémérides ou les Tables, & il faut bien fur mer fe contenter de les connoître par cette voie.

Quant aux moyens de connoître l'heure, en fuppofant connue la déclinaifon de l'aftre ou des aftres obfervés, ils font en grand nombre, & on peut bien l'appercevoir par la relation qui fe trouve entre la hauteur du pole & l'angle horaire d'un aftre. Il y a en effet autant de moyens géométriquement bons de trouver l'heure, que de trouver la hauteur du pole. Car 1°. il y en a pour trouver ces deux chofes conjointement, ou pour trouver celle qu'on

veut des deux ſans avoir l'autre; & 2°. s'il y a des moyens ſpéciaux pour trouver la hauteur du pole, il y en a autant de même qualité pour découvrir l'heure. Ces moyens particuliers de trouver la latitude, ſont ceux où l'on ſuppoſe que l'heure eſt connue. En renverſant donc les ſuppoſitions & l'opération, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant la latitude connue, on doit avoir des moyens particuliers de connoître l'heure. Mon deſſein eſt d'expoſer ces moyens divers; il y en a de l'une & de l'autre eſpece, qui peuvent avoir leur utilité ſur mer, ſuivant les rencontres, ainſi que je l'expliquerai dans la ſuite. On voit par-là, que je ſerai obligé de parler de la recherche de la hauteur du pole, quoique ce ne ſoit pas mon objet direct: j'en parlerai même aſſez amplement, cet objet étant ſi fort lié avec celui que je dois avoir, qu'on ne peut éviter de les joindre juſqu'à un certain point, ſans préjudicier au ſujet dont il s'agit. Auſſi M. de Maupertuis, dont le principal but a été d'enſeigner à trouver la latitude, a beaucoup parlé incidemment de l'invention de l'heure, & je ne peux que le ſuivre, & tâcher de glaner derriere lui.

Pour obſerver quelque ordre, je partage cette Partie en trois Chapitres. Dans le premier, je rapporterai les moyens de trouver l'heure ſans avoir la hauteur du pole, ou conjointement avec cette hauteur, leſquels ſont fondés ſur les plus ſimples combinaiſons d'obſervations. (J'entens par ces plus ſimples combinaiſons, celles où il n'entre que deux élémens, outre la déclinaiſon de l'aſtre ou des deux aſtres obſervés, & non celles qui peuvent conduire aux calculs les plus ſimples.) Dans le ſecond Chapitre, j'indiquerai tous les moyens (que je ſçai) de trouver l'heure, la hauteur du pole étant ſuppoſée connue. Enfin dans le troiſieme, j'expoſerai le reſte des moyens de trouver l'heure concurremment avec la hauteur du pole.

PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Des moyens de trouver l'heure ſans avoir la hauteur du pole, ou avec cette hauteur.

PROBLEME PREMIER.

LA *hauteur & l'Angle azimuthal d'un Aſtre étant donné; trouver l'heure.*

La cinquieme Formule de l'Aſtronomie Nautique, rapportée au commencement du premier Lemme, donne $t = \frac{mk}{y}$, & la différence de l'aſcenſion droite de cet aſtre & du Soleil, donne l'heure. L'opération que l'algébre vient de fournir, eſt la même que preſcrit la Trigonométrie Sphérique.

SCHOLIE. A ce Probleme répond celui de trouver la hauteur du pole, les mêmes élémens étant donnés; & la deuxieme formule du premier Lemme, fournit pour cela une équation du ſecond degré.

REMARQUE. Telles ſont les relations entre la hauteur du pole, la déclinaiſon d'un aſtre, ſa hauteur, ſon angle azymuthal & ſon angle horaire, comme je l'ai déja obſervé; que trois de ces élémens divers étant donnés, on peut trouver les deux autres, & on vient d'en donner un exemple. Mais l'on n'iroit pas loin ſi on n'avoit que cela. Telles ſont les relations entre les élémens dont il

s'agit, & telle eſt l'utilité du ſecond Lemme, qu'une eſpece de ces élémens étant donnée double avec une autre d'entre eux, on peut trouver les trois reſtans. Il y a plus; la ſituation reſpective des aſtres étant connue, il n'eſt pas néceſſaire que les élémens donnés outre la déclinaiſon, appartiennent au même aſtre, pour trouver ce qu'on demande: on y parvient en chaſſant de quelques-unes des formules du premier Lemme, où il entre deux élémens inconnus, un de ces deux élémens. Quant aux obſervations ſur leſquelles on ſe fonde, ou elles ſont faites en même moment, ou en des tems différens. Dans ce dernier cas, il faut connoître l'eſpace de tems écoulé entre les deux obſervations; mais cela ne rend pas le calcul plus difficile que quand les obſervations ſont contemporaines, & n'y apporte même aucun changement; car il faut alors concevoir un aſtre idéal, qui ait la même déclinaiſon que l'aſtre réel obſervé dans un des momens, mais qui ſoit éloigné de lui en aſcenſion droite ſur la ſphere céleſte, de la quantité de degrés que vaut le tems écoulé entre les obſervations, & raiſonner comme ſi on eût obſervé cet aſtre idéal, & qu'on l'eût obſervé dans le moment de l'autre obſervation réelle.

Nous avons trois combinaiſons générales d'obſervations à employer, car l'on a ou deux hauteurs, ou deux angles azymuthaux, ou une hauteur, & un angle azymuthal.

PROBLEME II.

Les hauteurs de deux aſtres E, E' étant données, avec leur déclinaiſon & le tems écoulé entre les obſervations, trouver l'heure de l'une & de l'autre.

REMARQUE. Il eſt préalable pour la ſolution de ce probleme de trouver la hauteur du pole, parce qu'il eſt

beaucoup plus facile de chasser u que s de la formule dont on a besoin.

Soient les sinus de la déclinaison des deux astres, x, x', leurs cosinus, y, y', les sinus des deux hauteurs, h, h', les cosinus des angles horaires qui leur répondent, u, u'. Soient nommés p & q le sinus & le cosinus de la différence, ou de la somme de l'angle du tems écoulé entre les observations, & de celui qui est la différence des deux astres en ascension droite. C'est la différence de ces angles qu'il faut prendre, si c'est le précédent des deux astres qui a été observé en premier lieu; c'est la somme de ces deux angles qu'il faut prendre, si c'est au contraire le suivant des deux astres qui a été observé en premier lieu. (Cette signification des lettres p, q, subsistera dans la suite.)

On a (par la remarque qui précéde ce probleme, & par le second Lemme) $ru' = qu - pt$, ou $ru' - qu = -p\sqrt{(rr - uu)}$, en supposant que les deux points de l'équateur, auxquels répondent l'astre réel & l'astre idéal au moment de l'une des observations, sont dans le cas de la *Fig.* 5, où ces points sont désignés par les lettres $e\iota$. Mettant dans la formule $ru' - qu = -p\sqrt{(rr - uu)}$ les valeurs de u & de u', prises dans la premiere formule du premier Lemme, pour le cas où l'astre est observé tant au-dessus de l'équateur, que du cercle de six heures, $u' = \frac{rrh' - rsx'}{cy'}$, & $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, quarrant chaque membre, afin de chasser l'incommensurable, mettant pour cc, sa valeur $rr - ss$, & substituant, pour abréger, rr au lieu de $xx + yy$, dans un des termes du coëfficient de ss, & rr au lieu de $pp + qq$, dans un des termes tous connus, il vient l'équation du second degré,

$$\left.\begin{array}{l}(rx'y-qxy')^2\\ +rrppy'y'\end{array}\right\} ss \left\{\begin{array}{l}-2r^3h'x'yy\\ +2r^2qh'xyy'\\ -2r^3hxy'y'\\ +2r^2qhx'yy'\end{array}\right\} s = \left\{\begin{array}{l}+rrppyyy'y'\\ +2r^3qhh'yy'\\ -r^4h'h'yy\\ -r^4hhy'y'.\end{array}\right.$$

Et prenant $A=(rx'y-qxy')^2+rrppy'y'$, $B=r^2h'x'yy-rqh'xyy'+r^2hxy'y'-rqhx'yy'$, & $C=ppyyy'y'+2rqhh'yy'-r^2h'h'yy-r^2hhy'y'$, on a pour le ſinus de la hauteur du pole,

$$s=\frac{rB}{A}\pm\frac{r}{A}\sqrt{(BB+AC.)}$$

Ayant la hauteur du pole, il eſt évident qu'on aura les angles horaires par les équations $u=\frac{rrh-rsx}{cy}$, ou $u'=\frac{rrh'-rsx'}{cy'}$, & l'heure des obſervations, par l'aſcenſion droite des aſtres.

SCHOLIES.

I. Le calcul précédent n'a été fait que ſur l'hypotheſe d'une certaine ſituation reſpective des deux aſtres, & il en eſt bien d'autres poſſibles; car non-ſeulement les deux aſtres peuvent encore être ſuppoſés tous deux au-deſſous de l'équateur, ou au-deſſous du cercle de *ſix heures*, mais encore l'un peut être au-deſſus de ces deux cercles, le ſecond étant au-deſſous de l'un des deux; un des aſtres peut être deſſous l'équateur, & l'autre deſſous le cercle de ſix heures; l'un peut être d'une part, & le ſecond d'autre part du Méridien: enfin l'angle $\cdot Ce$, dont p eſt le ſinus, peut être obtus auſſi-bien qu'aigu. Or il ſeroit long de calculer le probleme pour toutes les combinaiſons poſſibles d'hypotheſes, l'une après l'autre, mais on peut

peut éviter ce travail, pourvû que l'on entende bien la formule qui vient d'être trouvée, & qu'on y change; quand il s'agira de la mettre en pratique, les signes qui n'auront pas leur signification simple, en leurs contraires. Pour ne rien laisser au hasard, j'ai calculé le Probleme relativement à diverses hypotheses, d'entre celles que je viens d'indiquer, en observant de bien marier le second Lemme avec le premier, & je suis toûjours parvenu à une formule composée des mêmes termes, & affectée dans quelques cas des mêmes signes, & qui en d'autres cas différoit seulement par quelques signes, de celle que je viens de donner. J'ai trouvé de plus, que la mutation des signes étoit réglée par des loix que je vais marquer; c'est pourquoi je me suis dispensé de continuer le calcul du probleme, pour le reste des hypotheses possibles.

Ce que j'appelle bien marier (pour le dire en passant) les formules des deux Lemmes, c'est les prendre dans leurs états correspondans, ainsi que j'ai fait ci-dessus, & que je vais le montrer plus en détail par un autre exemple.

Supposons que l'un des astres E, ait été observé au-dessus tant de l'équateur, que du cercle de six heures, & que l'autre E', l'ait été au-dessous de ce deuxieme cercle, il faut faire $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, & $u' = \frac{-rrh' + rsx'}{cy'}$: si de plus, les deux astres ont été observés du même côté du méridien, & que l'angle $\cdot Ce$, dont p est le sinus, soit aigu, ce qui est le cas de la *Fig.* 6. (où A représente le point de l'équateur, que rencontre la portion supérieure du méridien, & a le point opposé). Il faut faire $ru' = -qu + pt$, ou $ru' + qu = pt$: mais si l'angle $\cdot Ce$ est obtus, ce qui est le cas de la *Fig.* 11, il faut prendre $ru' = qu + pt$. Ainsi, appliquer à propos la formule du second Lemme, prise dans un état quelconque, entre les trois

dont elle est susceptible, c'est l'appliquer à quelqu'un des cas de la situation respective de deux ou plusieurs points du ciel auxquels elle peut convenir ; car on fera, par ce moyen, un bon calcul, & dont le résultat bien entendu, ne se bornera pas à la seule hypothese sur laquelle on aura travaillé ; au lieu que si on marioit au hasard la formule du second Lemme, avec une de celles du premier, prise dans un état quelconque, on s'exposeroit peut-être à faire un calcul vicieux, ou du moins on en feroit un qui seroit inutile, faute de pouvoir discerner ce à quoi il conviendroit.

Voici les loix des signes de notre Formule. Elle convient naturellement dans l'état où elle est, à tous les cas où les deux astres déclinent du côté du pole élevé, & où l'angle Ce est aigu : que si cet angle est obtus, il faut prendre négativement son cosinus q ; & si l'un des astres observés, ou tous les deux, déclinent du côté du pole abbaissé, il faut prendre négativement le sinus x ou x' de cette déclinaison. Cela posé, s'il n'y a dans un terme de la formule qu'une quantité qui doive être prise négativement, & qui soit linéaire, il faut changer le signe de ce terme en son contraire ; il en est de même s'il se trouvoit trois quantités négatives dans le même terme, ou si le quarré d'une quantité négative y étoit multiplié par une autre quantité négative linéaire : mais si deux quantités négatives sont multipliées l'une par l'autre dans un terme, ou si une quantité négative y est au second degré, il faut laisser le signe de ce terme.

On comprend apparemment assez sans que j'en avertisse, qu'après avoir mis la formule précédente de la hauteur du pole dans l'état convenable, & après s'en être servi pour trouver cette hauteur, il faut encore avoir soin, en revenant à la premiere formule du premier Lemme,

pour trouver l'un ou l'autre des angles horaires, de choisir l'état de cette formule qui convient à l'observation de l'astre dont on veut avoir l'angle horaire; il faut, dis-je, avoir le soin au moins de discerner le cas où cyu est égal à la somme des termes rrh & rsx (c'est celui où l'astre est sous l'équateur), d'avec ceux où cyu est égal à la différence de ces termes.

II. Nous avons une équation du second degré, pour trouver la hauteur du pole, & deux racines par conséquent, qui sont la valeur vraie ou apparente du sinus de cette hauteur. Il est donc à propos de voir ce que sont en effet ces racines; & cela convient d'autant plus, que l'Auteur de l'Astronomie Nautique, qui a donné un Probleme subordonné à celui-ci, s'est abstenu d'entrer dans aucune discussion sur ce point, qui est peut-être capable d'*embarrasser*, je ne dis pas un Astronome de profession, mais quelqu'un de l'ordre des Navigateurs. [C'est apparemment pour laisser une matiere d'exercice, que M. de Maupertuis a glissé sur le point dont il s'agit, car il a bien voulu s'arrêter d'ailleurs (Scholie du Probl. XV.) à rechercher la nature des deux racines de l'équation, que l'on a pour trouver le jour du plus court crépuscule, afin de prévenir le *qui pro quo* auquel on étoit exposé en certain cas, & il a même traité cette affaire d'*importante*.] Nous avons deux racines; mais pourquoi (peut-on demander d'abord) en avons-nous deux? Le voici. C'est qu'il y a un point du ciel autre que le pole, qui a même relation que le pole aux deux points donnés du ciel, qui sont à certaines distances de l'horison; il ne s'agit que de sçavoir laquelle des deux racines de notre équation est la vraie valeur de s.

J'observe par préalable, que si les deux astres observés déclinent du côté du pole abbaissé, la somme B est néces-

sairement négative : il y a donc une racine de l'équation qui est visiblement négative, mais l'autre racine doit être de la qualité contraire. Si les deux astres déclinent de différens côtés, il doit y avoir aussi une racine négative, & une racine positive : si enfin les deux astres déclinent du côté du pole élevé, une des racines peut encore être négative, & l'autre positive ; mais il se peut aussi que les deux racines soient positives, & c'est ce qui arrive lorsque $B > \sqrt{(BB+AC)}$, c'est-à-dire, lorsque la somme C est négative. (Si C est zéro, une des racines est aussi zéro, & il faut joindre ce cas à celui où les deux racines sont positives).

Dans les cas où les deux racines sont de qualités contraires, on peut présumer que c'est la racine positive qui est la vraie valeur du sinus de la hauteur du pole, & cela est en effet. Aussi est-il constant, que lorsqu'on cherche une chose *directement* par l'algebre, ce n'est aucune des racines négatives qui peuvent être mêlées dans la solution, qui est la vraie valeur de ce qu'on cherche, c'est autre chose que donnent ces racines (& si l'on a la curiosité de faire une nouvelle opération, pour chercher *directement* la chose qu'a donnée une des racines négatives, provenues de la premiere opération, on ne manquera pas de retrouver la valeur de cette chose, affectée du signe positif.) Mais dans le cas où les deux racines sont positives, laquelle des deux est la valeur du *sinus cherché* ? C'est ce cas qui peut *embarrasser*.

Pour lever la difficulté, je dis qu'il faut revenir sur les observations qui ont été faites, ou bien les deux astres ont été observés de différens côtés du méridien, ou du même côté. Dans le premier de ces cas subalternes, il faut remarquer le vertical où étoit un des astres, lorsqu'on a observé sa hauteur, & voir de quel côté de ce vertical a été observé l'autre astre. Si ç'a été du côté de ce vertical où

est le pole élevé, c'est la moindre des deux racines positives qui est le sinus de la hauteur du pole; si c'est du côté de ce vertical où n'est pas le pole élevé qu'ait été observé le second astre, c'est la plus grande des deux racines qui donne la hauteur du pole. Que si les deux astres ont été observés de même part du méridien, il faut remarquer le vertical où étoit l'astre observé à la moindre hauteur, & voir pareillement de quel côté de ce vertical a été observé l'autre astre : si c'est du côté où se trouve le pole élevé, c'est encore la moindre des deux racines positives qui donne la hauteur du pole; & c'est la plus grande de ces deux racines qui donne cette hauteur, si l'astre observé à la plus grande hauteur, l'a été du côté du vertical susdit, où n'est pas le pole élevé. Ainsi l'une ou l'autre des racines positives de notre formule, peut être utile suivant les circonstances, & comme ces circonstances qui caractérisent la racine utile, n'entrent point dans le calcul du probleme, il falloit bien que l'algebre, pour fournir ce qu'on lui demandoit, nous donnât plus que nous ne demandions, c'est-à-dire, une équation du second degré, où il y a une apparence de superfluité. Dans les cas-mêmes où les deux racines sont de qualité contraire, la racine négative n'est point absolument superflue, elle indique, étant prise positivement, la hauteur du point du ciel qui seroit le pole, si les astres observés déclinoient de l'équateur, du côté opposé à celui où ils sont, ou (pour exprimer la chose autrement) qui seroit le pole à l'égard d'un Observateur situé de l'autre côté de l'équateur que celui qui a fait réellement les observations, & qui auroit vû les mêmes astres aux mêmes hauteurs.

Les deux racines contenues dans la formule, peuvent non-seulement être toutes deux positives, mais encore égales, & c'est ce qui arrive lorsque $BB + AC = 0$;

c'est-à-dire, lorsque la somme C est négative, & que B est moyenne proportionnelle entre la somme A & cette somme C prise positivement; & c'est ce qui doit se rencontrer lorsque les deux astres ont été observés dans le même azymuth. Ce n'est aussi que dans ce cas que l'égalité des racines doit avoir lieu, si on suppose que les hauteurs aient été prises dans l'exactitude géométrique; mais si l'on y a commis quelque erreur, les deux racines peuvent encore être égales, lorsque les astres ont été observés dans des azymuths réellement différens, mais peu éloignés.

Pour ne rien omettre, disons que les deux racines contenues dans notre formule peuvent se trouver imaginaires. C'est ce qui n'arriveroit jamais, à la vérité, si les hauteurs données étoient géométriquement exactes, mais qui est possible, à cause des erreurs auxquelles les observations sont sujettes. On sera exposé à cette espece d'inconvénient, lorsque l'on observera les deux astres dans le même vertical, ou dans des verticaux voisins [c'est-à-dire, qui font un petit angle]. Je dis que de rencontrer des racines imaginaires, est seulement une espece d'inconvénient, parce qu'en ajoûtant aux hauteurs observées, ou en retranchant quelques minutes, on retrouvera les racines réelles que l'on avoit manquées. C'est à la plus suspecte des deux observations, s'il y en a une de telle, qu'il faut sans doute faire toute la correction, ou la principale correction; mais en cas d'égalité, la correction doit être partagée entre les deux observations; & voici, par exemple, ce qui doit être fait dans ce cas. Si les deux astres ont été observés de part & d'autre du méridien, il faut augmenter chacune des hauteurs observées. Si au contraire, les deux astres ont été observés de même part du méridien, il faut augmenter la plus grande

des hauteurs observées, & diminuer la moindre. On connoît assez que la correction des hauteurs ne doit aller que jusqu'à faire $BB + AC = 0$. (On verra dans la seconde Partie, le fondement de ce que j'ai dit dans cette Scholie).

III. Notre Probleme a quelque étendue, & il comprend sous lui plusieurs cas particuliers, deux desquels sont traités séparément dans l'Astronomie Nautique, & doivent par conséquent passer pour intéressans. On peut, en considérant ces cas d'une certaine façon, arriver à leurs solutions, par des opérations plus simples que celles de notre probleme. Mais si on veut avoir ces cas résolus avec une entiere exactitude, il faut faire certaines corrections à quelques-uns des élémens employés dans les formules trouvées par ces opérations particulieres, ou bien il faut se servir de celle qui est ci-dessus. Cette formule a donc la propriété d'être plus exacte par elle-même, & plus générale qu'aucune autre : & si c'est un *avantage* * *d'avoir plusieurs Problemes résolus par une même méthode & un même calcul*, la voie que j'ai prise n'est point à mépriser, quoique d'autres puissent lui être préférables, soit à raison du plus de simplicité des opérations, soit à raison du génie que suppose l'invention des corrections qui sont nécessaires, quand on prend ces voies. Au reste, celle que j'ai suivie peut fournir les mêmes formules auxquelles on parvient par ces autres voies, ainsi qu'on va voir dans les Corollaires suivans.

COROLLAIRE I. On peut employer deux hauteurs du même astre, au lieu des hauteurs de deux astres. Dans ce cas (qui est celui du Probl. XXII. de l'Astron. Naut.), si l'astre observé est une étoile, les quantités exprimées par x' & y' dans la formule du probleme precédent, sont précisément les mêmes que x, y. Et si c'est le Soleil, ou

* Voyez la Préface de l'Astron. Nautique, p. XXXIX.

une planete qui ait été observée, supposons pour un moment, que x' & y' sont aussi les mêmes que x, y, en faisant abstraction du changement de l'astre en déclinaison. Tous les termes de la formule donnée ci-dessus, se trouvent donc multipliés par yy; ainsi on doit supprimer ce facteur commun. D'ailleurs on a lieu d'abréger la formule, en substituant o à l'expression $r-q$, ou $r+q$ du sinus verse de l'angle $\cdot Ce$: ainsi dans la formule $s=\frac{rB}{A}\pm\frac{r}{A}\sqrt{(BB+AC)}$, A est $=ooxx+rrpp$, $B=\pm ox(rh+rh')$, & $C=ppyy+2rohh'-(rh+rh')^2$ (ou $=ppyy\mp 2rqhh'-rrhh-rrh'h'$). Ces valeurs de s & de A, B, C, reviennent à celles que donne l'Auteur de l'Astronomie Nautique, dans la solution du Probleme cité, solution dont j'ai emprunté ci-dessus jusqu'au discours.

SCHOLIE. Lorsque c'est le Soleil ou une planete, dont on a observé les hauteurs, si on veut avoir égard au changement de déclinaison que l'astre a pû souffrir dans l'intervalle des observations, il n'y a que deux ou trois partis à prendre. L'un est de revenir à la formule générale donnée ci-dessus; un autre est de substituer à l'un des élémens employés dans les formules particulieres qu'on vient de voir pour A, B, C, celui qui auroit eu lieu à peu près, si l'astre n'eût point changé en déclinaison, *tout le* reste étant le même. C'est ce second parti qu'a pris M. de Maupertuis. *Il faut*, dit-il, *mettre pour* h' *le sinus de hauteur à laquelle on auroit observé l'astre, si la déclinaison étoit demeurée la même, &c.* Et pour trouver le sinus de cette hauteur idéale, il cherche sa différence d'avec h', c'est-à-dire, la variation dh' qui répond à la variation dx du sinus de la déclinaison, ou à celle dy de son cosinus. La valeur de dh' etant ajoûtée à h', ou en étant retranchée, on

a la

à la quantité qui doit être ſubſtituée à h' dans les ſommes particulieres B, C. Or, pour avoir la valeur de dh', M. de Maupertuis remonte à l'équation $u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}$, où il fait varier h', x & y, pendant que c, s & u' demeurent conſtantes. On a donc $du = 0$, de même que le numérateur de la fraction $\frac{rrydh' - rrh'dy - rsydx + rsxdy}{cyy}$, qui eſt $=$ à du', d'où on tire : $dh' = \frac{rh'dy - sxdy + sydx}{ry}$, ou en ſubſtituant $-\frac{ydy}{x}$ à dx ; parce que x croiſſant, y diminue, on a $dh' = \frac{rh'x - sxx - syy}{ryx} dy$, ou $= \frac{hx - rs}{yx} dy$, ou encore en ſubſtituant $-\frac{xdx}{y}$ à dy ; $dh' = \frac{rs - hx}{yy} dx$, parce que $xx + yy = rr$.

Le ſinus de la hauteur du pole ſe trouvant enveloppé dans l'expreſſion de la quantité qui doit être ajoûtée à h', ou en être retranchée, pour avoir le ſinus de la hauteur où eût été l'aſtre dans le moment d'une des obſervations ; s'il n'eût point changé de déclinaiſon ; il eſt viſible qu'en prenant le parti qui vient d'être expoſé, on ſeroit dans la néceſſité de faire deux calculs ſur la formule du Coroll. précédent, pour avoir la hauteur du pole avec l'exactitude déſirée ; car il faudroit faire un premier calcul ſur cette formule, pour avoir un ſinus approchant de celui de la hauteur du pole ; ce ſinus ſerviroit à trouver la valeur de dh', puis ayant pris la différence, ou la ſomme de h & de dh', & ayant ſubſtitué cette différence ou cette ſomme au lieu de h', dans la formule du Corollaire, il faudroit réitérer le calcul ſur cette formule, pour avoir un ſinus plus approchant de celui de la hauteur du pole que le premier : ce ſeroit un circuit, & un circuit peu court.

Si l'on n'adopte pas le premier parti, il vaudroit mieux, j'oſe le dire, prendre un troiſieme parti, que celui qu'on

vient de voir. Il consiste, ce troisieme parti, à corriger le sinus trouvé par le premier calcul, fait sur la formule du Corollaire, lequel sinus n'est pas exactement celui de la hauteur du pole : je veux dire qu'il faudroit chercher l'erreur, que la négligence du changement de déclinaison fait commettre sur le sinus de la hauteur du pole : l'expression algébrique de cette erreur, n'est ni difficile à avoir, ni fort compliquée.

Pour l'avoir, je fais varier dans la formule $u' = \frac{\pm rrh' \mp rsx}{cy}$ les quantités s, c, x, y, pendant que h' & u' demeurent constantes, & j'ai

$$du' = o = \frac{-rrh'cdy - rrh'ydc + rscxdy + rsxydc - rscydx - rcxyds}{ccyy},$$

substituant $-\frac{sds}{c}$ à dc dans le numérateur de cette fraction égale à zéro, parce que c croissant, s diminue ; substituant encore $-\frac{ydy}{x}$ à dx, puis rr tant à $ss + cc$ qu'à $xx + yy$, & multipliant tous les termes par $\frac{cx}{rr}$, j'ai $(rxxy - h'sxy)\, ds = (rscc - h'xcc)\, dy$; & $ds = \frac{h'x - rs}{h's - rx} \times \frac{cc}{sy} dy$. Telle est la valeur de l'erreur que la négligence d'un petit changement de déclinaison, indiqué par dy (qui est la différence des cosinus des deux déclinaisons *données*) apporte au sinus de la hauteur du pole. Retranchant donc cette valeur de la quantité erronée s trouvée en nombres, par la formule du Coroll. précédent, ou l'y ajoûtant, on aura le sinus corrigé de la hauteur du pole. On voit sans doute que dy est positive, si la déclinaison de l'astre est moindre lorsqu'il est observé à la hauteur dont h' est sinus, que lorsqu'il l'est à la hauteur marquée par h, & que dy est négative dans le cas opposé. On doit encore comprendre, que lorsque l'astre déclinera du côté du pole

abbaissé ; ce qui donne $cyu' = rrh' + rsx$, il faut avoir égard à la différence des signes de ce cas, d'avec ceux de l'hypothese faite ci-dessus. On a dans celui-ci, $ds = \frac{h'x + rs}{h's + rx} \times \frac{cc}{xy} dy$. Au reste, si la valeur de ds se trouve positive, cela marque que le sinus peu exact s, peche par excès ; ainsi il faut en retrancher ds, pour avoir le sinus corrigé de la hauteur du pole. Si au contraire, la valeur de ds est négative, le sinus erroné s peche par défaut, & pour le corriger, il faut lui ajoûter ds prise positivement.

Au lieu de corriger le sinus non exact de la hauteur du pole, on peut corriger la hauteur même, à laquelle appartient ce sinus. Soit dD le petit arc qui est la différence des deux déclinaisons, & dL le petit arc du méridien, qui est l'erreur commise sur la hauteur du pole, en négligeant le changement de déclinaison, on a $dy = \frac{x\,dD}{r}$ & $ds = \frac{c\,dL}{r}$: substituant ces valeurs de dy & ds, dans la formule précédente, on a en général $dL = \frac{h'x \mp rs}{h's \mp rx} \times \frac{c}{y} dD$; cette formule-ci est un peu plus simple que celle-là, & plus avantageuse par conséquent, au moins pour ceux qui chercheront seulement la hauteur du pole, & non l'heure.

Quand on ne mettroit pas en pratique l'une ou l'autre correction que je viens de proposer, leurs formules ne laisseront pas d'avoir quelque utilité. Elles nous feront connoître de quelle conséquence peut être la négligence d'un petit changement de déclinaison (la formule donnée par M. de Maupertuis pour dh', peut servir au même usage). Je remarque d'abord que quand l'astre décline du côté du pole abaissé, l'erreur sur la déclinaison en cause toûjours une réelle sur la hauteur du pole, parce que le numérateur $hxc + rsc$ de la fraction qui entre dans la valeur de dL, ne peut être que réel : mais lorsque l'astre

décline du côté du pole élevé, l'erreur sur la hauteur du pole peut être nulle, parce que l'on a alors $h'xc-rsc$ pour numérateur de ladite fraction, & que $h'x$ peut quelquefois être $=rs$. C'est ce qui arrivera, si le sinus h' de la hauteur à laquelle l'astre a été observé dans le moment pour lequel on lui attribue une fausse déclinaison, est à celui de la hauteur du pole, comme le rayon est au sinus de la déclinaison, ou bien si $h':r::s:x$. Or, comme h' ne sçauroit surpasser r, & qu'au contraire elle est supposée moindre que r par la qualité du Probleme (puisque si on avoit $h'=r$, cette seule observation donneroit $s=x$, & $v'=r$): on voit déja que la hauteur du pole doit être moindre que la déclinaison de l'astre, pour avoir $ds=0$; c'est-à-dire que l'astre doit être un de ceux qui passent entre le zénith & le pole, dans la partie supérieure de leur cours, astres dont on sçait que l'angle azymuthal ne peut croître que jusqu'à un certain point, après quoi il décroît. L'algebre seroit bien capable de nous faire voir dans quel point de son cours un de ces astres arrive à la hauteur qui a pour sinus $h'=\frac{rs}{x}$; mais une legere connoissance de la doctrine de la sphere, ou l'inspection seule d'une sphere, suffisent pour discerner ce dont il s'agit.

Soit ici *MhR* une partie de l'horison, *P* le pole, *Ph* le méridien, *EM* le vertical de l'astre, *EPR* une portion de son cercle horaire, nous avons (à cause de l'angle *R*
Fig. 39. commun aux deux triangles sphériques, *PhR*, *EMR*, & de leurs angles droits, *h*, *M*) cette analogie. *Sin.* $EM(h')$: *sin.* $Ph(s)$: : *sin.* ER : *sin.* PR, qui devient $h':s::r:x$, si *ER* est un arc de 90 degrés, car *PR* sera égal à l'arc de la déclinaison, dont *PE* est le complément. Or dans ce cas, l'angle *PEM* est droit, ainsi le cours de l'astre (cours perpendiculaire au cercle horaire) est dirigé suivant *EM*,

lorsque $h'x = rs$. C'est donc lorsque le vertical d'un astre est perpendiculaire à son cercle horaire, ou bien lorsque le cours d'un astre est perpendiculaire à l'horison (tems où on sçait que son angle azymuthal est le plus grand), que la petite erreur commise sur sa déclinaison, n'en cause point sur la hauteur du pole. Et cela est assez visible par la Figure citée, ou sur la sphere, indépendamment du calcul différentiel, qui fournit pour ce cas $hx = rs$. Car *ER* étant supposé perpendiculaire à *EM*, ce qui le fait valoir 90 degrés, si $E\iota$ est un très-petit arc, le sinus de l'arc ιR sera très-peu différent du sinus de *ER*, ou du sinus total, & doit même lui être réputé égal, si on traite $E\iota$ comme un infiniment petit. Or, les sinus des hauteurs *EM*, $\iota\mu$, sont en même rapport que les sinus de *ER* & de ιR. On a donc pour $\iota\mu$, le même sinus que pour *EM*; ainsi on peut négliger sans conséquence, la petite différence de déclinaison $E\iota$, c'est-à-dire, supposer l'astre en ι, au lieu qu'il est en *E*, lorsqu'il est question d'employer le sinus de la hauteur de cet astre, puisque celui de la vraie hauteur *EM* ne differe point de celui de la hauteur du point ι, où on le suppose.

L'analogie $h' : s :: r : x$, fait voir que la hauteur où il faut qu'un astre ait été observé pour négliger quelque chose sur sa déclinaison, sans tirer à conséquence pour la hauteur du pole, doit être plus grande que cette hauteur & d'autant plus grande, que la déclinaison est plus petite. Ainsi les grandes hauteurs n'étant pas aisées à observer avec exactitude, la plus grande déclinaison du Soleil & des planetes, ne passant pas 29 degrés, & la hauteur du pole devant d'ailleurs être moindre que la déclinaison de l'astre, ce ne peut être que dans les pays où le pole est fort bas, que l'on ait l'avantage d'avoir $h'x = rs$, à l'égard du Soleil, ou d'une planete.

Puiſqu'une petite erreur dans la déclinaiſon, n'en cauſe point ſur la hauteur du pole, dans le cas où l'aſtre eſt obſervé lorſqu'il monte ou deſcend perpendiculairement à l'horiſon, ou bien lorſque le vertical de l'aſtre eſt perpendiculaire à ſon cercle horaire, il en faut conclurre que l'erreur ſur la hauteur du pole eſt au contraire la plus grande, dans le cas où l'aſtre eſt obſervé lorſque ſa direction eſt parallele à l'horiſon, ou bien lorſque ſon vertical ſe confond avec ſon cercle horaire, c'eſt-à-dire, lorſqu'il eſt au méridien. Or dans ce cas, l'erreur ſur la hauteur du pole eſt préciſément de même quantité que celle ſur la déclinaiſon; car le numérateur $h'xc \mp rsc$ de la fraction qui multiplie dD dans la valeur de dL, eſt alors égal au dénominateur $h'sy \mp rxy$ de cette fraction: c'eſt ce qu'il eſt aiſé de reconnoître, en conſidérant que lorſqu'un aſtre eſt au méridien, ſa hauteur eſt alors la ſomme, ou la différence de ſa déclinaiſon, & de la hauteur de l'équateur (qui eſt complément de celle du pole); on a donc par le Lemme ſecond $rh' = cy - xs$, pour le cas où l'aſtre décline du côté du pole abbaiſſé, &c.

Il naît de ce qu'on vient de remarquer touchant l'erreur commiſe ſur la hauteur du pole, une conſéquence pour la pratique; ſçavoir que ſi l'on ne veut pas porter l'exactitude juſqu'à corriger la hauteur du pole, trouvée par la formule du Corollaire précédent, les *ſinus* & *coſinus* x, y, qu'il faut employer dans le *calcul*, ſont ceux de la déclinaiſon qui convient au moment de l'obſervation où l'aſtre eſt le plus près du méridien; parce que le cours de l'aſtre étant moins oblique à l'horiſon dans l'autre moment, l'erreur qu'on commettra en lui attribuant une fauſſe déclinaiſon pour ce moment, ſera de moindre conſéquence ſur la hauteur du pole. C'eſt le parti qu'on pourra prendre, ſi les deux hauteurs ſont fort différentes,

& furtout fi elles ont été prifes de même part du méridien ; mais fi les hauteurs ont été prifes de part & d'autre du méridien, & furtout fi elles font peu différentes, on doit faire autrement. Il faut attribuer à l'aftre, une déclinaifon moyenne entre celles qui lui appartiennent, aux momens des deux obfervations ; car fi les deux hauteurs étoient égales, les erreurs que les attributions d'une fauffe déclinaifon à l'aftre pour chacune des obfervations, cauferoient féparément fur la hauteur du pole, feroient égales, & d'ailleurs en fens contraires. Il s'opere donc une compenfation de ces erreurs, en faifant conjointement les deux attributions d'une déclinaifon moyenne à l'aftre.

COROLLAIRE II. Si l'aftre dont on a obfervé les hauteurs, eft dans l'équateur (c'eft le cas du Probl. 24 de l'Aftron. Nautique), on a $x = o$, & $y = r$; & la formule du probleme fe réduit à $ppss = r^2pp \pm 2rqhh' - r^2hh - r^2h'h'$, d'où on tire $s = \frac{1}{p}\sqrt{(rrpp \pm 2rqhh' - r^2hh - r^2h'h')}$. Il fera encore plus commode de fubftituer $rr - cc$ à ss, car on en déduira $ppcc = \pm 2rqhh' + r^2hh + r^2h'h'$, & $c = \frac{1}{p}\sqrt{(\mp 2rqhh' + rrhh + rrh'h')}$. A l'égard de l'heure, on a pour ce cas-ci, $u = \frac{rrh}{c} = \frac{rhp}{\sqrt{(\mp 2rqhh' + rr(hh + h'h'))}}$.

COROLLAIRE III. Si l'on a le tems écoulé entre l'obfervation de la hauteur d'un aftre, & le moment de fon coucher, ou de fon lever (ce qui eft le cas du Probl. 23. de l'Aftron. Nautique), on peut encore trouver la hauteur du pole, & l'heure des obfervations, par la formule du Probleme précédent, ou par celle du Corollaire I, pourvû que l'on fçache combien la réfraction moins la parallaxe, éleve les aftres qui paroiffent à l'horifon ; car il n'y aura qu'à prendre le finus de cette élévation

pour h'; mais il faut aussi prendre garde aux signes qu'on donnera à la valeur de u', tirée de la premiere formule du premier Lemme. Lorsqu'un astre paroît à l'horison, il est réellement abbaissé sous ce cercle à l'égard de l'Observateur, & élevé au-dessus de ce cercle à l'égard de l'antipode de l'Observateur. Or cet antipode verroit sous le cercle de six heures l'astre qui décline du côté du pole abbaissé pour l'Observateur; & au contraire sous l'équateur, l'astre qui décline du côté du pole élevé pour l'Observateur : il faut donc faire $cyu' = rrh' + rsx$, si l'astre qui paroît à l'horison décline du côté du pole élevé, ou $= - rrh' + rsx$, s'il décline du côté du pole abbaissé.

SCHOLIE. M. de Maupertuis propose pour ce cas, de faire $= 0$ le sinus de la hauteur de l'astre, au moment de son coucher ou de son lever; & négligeant encore le changement de déclinaison que l'astre peut avoir souffert, il trouve $\left.\begin{matrix} ooxx \\ rrpp \end{matrix}\right\} ss - 2r^2ohxs = \left\{\begin{matrix} rrppyy \\ -r^4hh \end{matrix}\right.$; puis il avertit que la réfraction horisontale faisant paroître l'astre sur l'horison plus long tems qu'il n'y est réellement, cette formule ne donneroit la hauteur du pole que peu exactement, à moins qu'on ne changeât quelqu'un des élémens qui y entrent. Au reste, il renvoie à son Probleme 34, pour trouver le moyen de faire cette espece de correction, qui consiste à retrancher du tems écoulé entre les deux observations, ce que la réfraction apporte de retardement au coucher de l'astre, ou d'avancement à son lever. Pour cela, M. de Maupertuis cherche la variation du', qui répond à dh', le reste étant constant; puis il met pour dh' l'arc dH du vertical, dont dh est sinus, & substitue à du' sa valeur en arc dE de l'équateur (on a $du' = \frac{tdE}{r}$). Mais les sinus & cosinus de l'angle horaire, se trouvent

enveloppés

enveloppés dans la formule qui provient de ces opérations (& quand on voudroit les en chasser, ce ne seroit qu'en y faisant rentrer les sinus & cosinus de la hauteur du pole). Or si ces quantités t', u', peuvent être supposées connues dans le cas propre de ce problème 34 *, ou dans les cas approchans, indépendamment de la hauteur du pole : il n'en est pas de même dans le cas où nous sommes, nous ne pouvons avoir t' & u' qu'après avoir trouvé la hauteur du pole, au moins grossierement. Ainsi à suivre la proposition de M. de Maupertuis, il faudroit, pour avoir la hauteur du pole avec l'exactitude désirable, faire un circuit comme celui dont j'ai parlé Coroll. I.

On évitera ce circuit, si l'on cherche ce qu'une erreur commise sur la hauteur d'un astre, en cause sur la hauteur du pole ; c'est-à-dire, si l'on cherche la valeur de la variation ds, qui répond à la variation dh', le reste étant constant. Prenant donc la formule $u' = \frac{\pm rrh' \mp rsx}{cy}$, qui sert au cas où l'astre décline du côté du pole élevé (il n'est pas nécessaire ici de pratiquer l'observation faite au Coroll. précédent) ; on a $du = \frac{rrh'dc - rrcdh' + rcxds - rsxdc}{ccy}$ $= 0$. Substituant $\frac{-sds}{c}$ à dc, & rr à $ss + cc$, il vient $ds = \frac{cc}{rx - h's} dh'$. Dans le cas où l'astre décline du côté du pole abbaissé, cyu' étant $= rrh' + rsx$, on a $ds = \frac{cc}{-rx - h's} dh'$. Or, la réfraction élevant l'astre à l'égard de l'Observateur, dh est une quantité positive, si on la prend pour la différence de sinus de la hauteur vraie & de la hauteur apparente ; ainsi l'erreur commise sur le sinus de la hauteur du pole, en négligeant l'effet de la réfraction, est négative, si l'astre décline du côté du pole abbaissé ; elle peut être

* On y suppose que la durée du jour solstitial est donnée.

positive, si l'astre décline du côté du pole élevé, & elle est en effet positive, lorsque h est petite. Pour appliquer la formule générale qu'on vient de voir, au cas particulier de ce Corollaire, j'observe que si x est fort grand & s petit, on pourroit supposer $h'=0$, & supprimer le terme sh dans cette formule, ce qui la feroit devenir $ds = \frac{cc}{\pm rx} dh'$: mais comme l'effet de la réfraction horisontale est assez considérable, il sera plus sûr de laisser ce terme, & on mettra pour h' ainsi que pour dh', le sinus de la quantité, dont la réfraction, moins la parallaxe, éleve un astre qui paroît à l'horison.

Au lieu de chercher l'erreur du sinus de la hauteur du pole, grossierement déterminé, on peut chercher l'erreur de cette hauteur même, & la formule en sera plus simple. Mettant dH pour dh', & $\frac{cdL}{r}$ pour ds, on a $dL = \frac{rc}{\pm rx - sh'} dH$.

Il est visible que par le moyen de l'une ou de l'autre de ces formules, & de l'une de celles de la scholie du *Coroll.* premier, on pourra corriger conjointement les deux erreurs commises sur la hauteur du pole, par la supposition que $h'=0$ lorsque l'astre paroît à l'horison, & par la négligence du changement de déclinaison qu'il a pû souffrir pendant le tems écoulé entre les deux observations. C'est peut-être là un mérite pour ces formules.

Au reste, il est bon d'avertir que ces formules proposées pour corriger la hauteur du pole, ne conviennent point au cas où l'astre est dans l'équateur, ou passe par l'équateur dans l'intervalle des observations, & qu'elles sont même peu justes lorsque la variation dh, qui est l'effet de la réfraction, ou qui répond à la variation du sinus de la déclinaison, n'est pas dans un petit rapport à ce

ſinus, ſurtout ſi h eſt peu conſidérable & s auſſi : mais ce défaut des formules ne vient point du calcul, il naît en premier lieu, de ce que l'une des ſuppoſitions ſur leſquelles eſt fondé le calcul, ne peut pas être vraie lorſque l'aſtre eſt dans l'équateur ; car dans ce cas, la premiere formule du premier Lemme, devient $cu' = rh'$: ainſi en regardant c comme donné, on a $cdu' = rdh'$; la variation du' eſt donc réelle, ſi dh' eſt réelle ; on ne peut donc pas ſuppoſer $du = o$ pour le cas où l'aſtre eſt à l'équateur, ſi h' eſt ſujette à une variation réelle, telle qu'eſt celle que cauſe la *réfraction*, ou une erreur ſur la déclinaiſon. Quant au cas où l'aſtre eſt fort voiſin de l'équateur, on peut à la vérité y ſuppoſer $du' = o$, quoique dh' ſoit réelle : mais alors la variation ds ou dL, qui répond à dh' eſt fort grande par rapport à elle, & d'autant plus grande que h' eſt plus petit, & que c eſt plus grand (les formules mêmes le font voir) : ainſi ds ou dL eſt dans un grand rapport à x ; on n'a donc pas droit de traiter ces variations comme étant d'un ordre de grandeur très-inférieur à x, ainſi que les principes du calcul différentiel requerroient qu'elles fuſſent.

Lors donc que la déclinaiſon de l'aſtre ſera nulle ou petite, il ne ſera pas à propos, je l'avoue, d'entreprendre de corriger la hauteur du pole groſſierement déterminée, ou ſon ſinus, de corriger, dis-je, ces quantités par les moyens que j'ai propoſés ; il faudra, ſi l'on veut employer les formules du Coroll. I. ou du Coroll. précédent, revenir au genre de moyen indiqué par M. de Maupertuis (Prob. XXIII.), parce que ce moyen tend non à découvrir l'erreur ds, ou la variation dh', mais à empêcher que s ne ſoit erroné, quoiqu'on prenne un faux h' ou un faux x' pour le moment de l'une des obſervations ; je veux dire qu'il faut changer le tems écoulé entre les deux obſerva-

tions, en celui qui auroit lieu si l'astre ne changeoit point de déclinaison dans leur intervalle, ou si la réfraction n'augmentoit pas la durée de son apparition (la deuxieme Partie fournira une maniere d'éviter sinon le circuit, du moins la longueur du circuit, à quoi ce genre de moyen engage).

1°. Pour le cas où l'on veut attribuer à l'astre une déclinaison un peu différente de celle qu'il a en certain moment, prenant la variation des quantités u', x', y' dans la premiere formule du premier Lemme, $cyu' = rrh' - rsx'$, ou = &c. en faisant h, s, c constans, l'on a $cydu' = -rsdx' - cu'dy'$; & substituant à du' sa valeur en arc dE de l'équateur, $\left(du' = \frac{t'dE}{r}\right)$, à dx sa valeur $\frac{ydD}{r}$, à $-dy'$ sa valeur $\frac{x'dD}{r}$; l'on a enfin $dE = \frac{cu'x - rsy}{cyt'}\, dD$, ou, &c. L'arc dE étant réduit en tems, ce tems est ce qu'il faut ajoûter à celui qui s'est écoulé entre les deux observations, ou qu'il faut en retrancher, pour avoir le tems qui se seroit écoulé entre ces observations, si l'astre n'eût point changé de déclinaison. C'est du Probleme 37 de l'Astronomie Nautique que je tire cette formule pour dE; j'y laisse les sinus s & t, ainsi que leurs cosinus, parce que ces quantités peuvent être déterminées concurremment par l'opération grossiere qui doit précéder la recherche du vrai sinus s.

2°. Pour le cas où l'on veut attribuer à l'astre une hauteur un peu différente de celle qu'il a en certain moment, prenant la variation des quantités u', h' dans la même formule du premier Lemme, $cyu' = rsx - rrh'$, ou, &c. en faisant s & x constans, l'on a (observant que dans le cas supposé, qui est celui où l'astre est vû au-dessous du cercle de six heures, u' diminue, lorsque h' croît) $cydu' = rrdh'$.

Substituant à du' sa valeur $\frac{t'dE}{r}$, & pour dh' mettant $\frac{kdH}{r}$, on a enfin $dE = \frac{rrk}{cyt'} dH$. Cette formule est tirée du Probleme 34 de l'Astron. Nautique : la précédente se combinera aisément avec celle-ci, pour le cas où l'on voudra attribuer tout-à-la-fois à l'astre, une déclinaison & une hauteur un peu différentes des siennes.

COROLLAIRE IV. Si l'on connoît le tems écoulé entre le lever ou le coucher de deux astres (ce qui est le cas du Probl. 39 de l'Astron. Nautique), on aura encore la hauteur du pole & l'heure des observations, par la formule du Probleme précédent, en mettant pour h ainsi que pour h' les sinus des quantités dont la différence de la réfraction & de la parallaxe horisontale, élevent l'un & l'autre de ces astres, & observant la précaution marquée au Coroll. III.

Si l'on veut faire h & $h' = 0$, on le peut, en substituant au tems écoulé entre les deux observations, celui qui auroit eu lieu, cessant la réfraction & la parallaxe, ou en se réservant de corriger l'erreur que ces suppositions de h & $h' = 0$ causent sur la hauteur du pole, lorsqu'on fait servir dans le calcul le vrai tems écoulé entre les deux observations. Il ne s'agit plus que de voir à quoi se réduit la formule du Probleme. Lorsqu'on fait h & $h' = 0$, elle devient :

$ss = \frac{rrppyyy'y'}{rrppy'y' + rrx'x'yy - 2rqxx'yy' + qqxxy'y'}$. Et nommant X & X' les tangentes des déclinaisons des deux astres, nous pouvons rendre cette formule plus simple, en mettant pour x & x' leurs valeurs $\frac{Xy}{r}$, $\frac{X'y'}{r}$; car tous les termes de la fraction se trouveront multipliés par $y'y'$, on aura donc $ss = \frac{r^4 + ppyy}{r^4pp + rrX'X'yy - 2rqXX'yy + qqXXyy}$; mettant dans

le terme r^4pp, $xx+yy$ pour rr, ce qui fera $pprrxx + rrppyy$, puis substituant à $rrxx$, sa valeur $XXyy$, tous les termes de la valeur de ss se trouveront multipliés par yy; mettant enfin $rrXX$ pour $ppXX+qqXX$, on aura $ss = \frac{r^4pp}{rrpp+rrXX+rrX'X'-2rqXX'}$. Et si l'on veut substituer $rr-cc$ à ss, on aura:

$$cc = \frac{rr(rrXX+rrX'X'-2rqXX')}{rrpp+rrXX+rrX'X'-2rqXX'}.$$

Nous pouvons déduire de ces valeurs de ss & cc, qui ont un même dénominateur, $\frac{rrss}{cc}$, $= \frac{r^4pp}{rrXX+rrX'X'-2rqXX'}$, ou bien $\frac{rs}{c}$ $= \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX+rrX'X'-2rqXX')}}$. Or, $\frac{rs}{c}$ est la tangente de la hauteur du pole. (La valeur que nous venons d'en trouver est la même que celle qu'en donne M. de Maupertuis, dans le Probl. cité).

Quant à l'heure, nous avons (puisque h est supposé $=0$) $rsx = cyu$, ou $\frac{rs}{c} = \frac{yu}{x} = \frac{ru}{X}$ (parce que $y : x :: r : X$) donc $u = \frac{rpX}{\sqrt{(rrXX+rrX'X'-2rqXX')}}$. Cette valeur de u sera exacte, si on retranche du tems écoulé entre les observations, la différence des retardemens que la réfraction apporte au coucher de chaque astre, ou des avancemens qu'elle apporte à leur lever; ou bien si l'on retranche de ce tems, ou si on lui ajoûte la somme de l'avancement & du retardement, lorsqu'on aura observé le lever d'un des astres & le coucher de l'autre, sinon il faudra chercher pour u la correction dont il aura besoin. La formule de cette correction est $du = \frac{rr}{cy}\,dh$.

Cette formule étant fort simple, on pourra s'en servir dans le cas du Coroll. précédent, après avoir déterminé grossierement l'heure sur le sinus peu exact de la hauteur du pole, supposé qu'on ne se soucie pas d'avoir ce sinus même corrigé.

SCHOLIE. I. Au lieu d'observer les astres au moment de leur lever ou de leur coucher, c'est-à-dire, dans un tems où ils sont au-dessous de l'horison rationel, il seroit plus à propos, par deux raisons, de les observer, s'il est possible, lorsqu'ils sont dans cet horison. La premiere est visible, on éviteroit par-là le besoin de correction.

Je tire la deuxieme de la Piece déja citée de M. Bouguer. Cet habile homme y a fait un paragraphe exprès (c'est le troisieme de la deuxieme Partie), pour montrer *qu'il vaut mieux tâcher d'observer les astres lorsqu'ils sont exactement dans l'horison rationel*, que de les observer à l'horison sensible; & il fonde ce conseil, sur ce que la réfraction horisontale est sujette à des irrégularités deux fois plus grandes environ, que celles de la réfraction qu'éprouve l'astre, lorsqu'il est dans l'horison rationel. Dans ce même paragraphe, M. Bouguer propose un expédient à l'égard du Soleil, pour l'observer à peu près dans l'horison, c'est *de l'observer lorsque le bord inférieur de son disque paroît élevé au-dessus de l'horison, à la vûe simple, d'environ la moitié de son diametre apparent*, parce que le diametre est à peu près égal à la quantité dont la réfraction l'éleve alors. L'Auteur de l'Astron. Nautique propose, *pag.* 88, une pratique qui revient à l'expédient de M. Bouguer.

II. Il y a un cas approchant de celui du Corollaire précédent, mais où il ne doit pas être question de chercher l'heure, parce qu'on la suppose connue exactement, ou à peu près, sans calcul, & avant d'avoir la hauteur

du pole. C'eſt à l'invention de cette hauteur ſeulement, que ſe dirige la conſidération de ces cas. On ſuppoſe que la durée de l'apparition d'un aſtre au-deſſus de l'horiſon, ou de ſon occultation ſous ce cercle, eſt connue, ou pour parler autrement, que le tems écoulé entre le lever & le coucher d'un aſtre, ou entre ſon coucher & ſon lever eſt connu (ſi l'aſtre décline du côté du pole abbaiſſé, c'eſt la durée de ſon apparition, & s'il décline du côté du pole élevé, c'eſt la durée de ſon occultation, que l'on a dû tâcher d'obſerver, afin que l'obſervation ſe reſſente moins de l'imperfection de l'inſtrument employé pour meſurer le tems). En parlant ici d'un aſtre, j'entends le Soleil, ou une des planetes les plus lumineuſes, parce que les étoiles ne ſont pas viſibles à l'horiſon; ainſi l'aſtre a pû ſouffrir, dans le cas dont il s'agit, un changement de déclinaiſon auquel il faut avoir égard. Or, un moyen ſûr pour cela, c'eſt de ſe ſervir de la formule du Coroll. précédent $\frac{rs}{c} = \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' + 2rqXX')}}$ (je mets ici le ſigne + devant le terme où entre *q*, parce que la durée de l'apparition ou de l'occultation d'un aſtre ſitué dans le zodiaque, eſt ordinairement plus grande que ſix heures, & moindre que dix-huit), on obtiendra, dis-je, la hauteur du pole avec une grande préciſion, par cette formule: mais notre cas ne requiert pas abſolument qu'on prenne la peine de s'en ſervir. Lorſque la déclinaiſon de l'aſtre ne ſera pas fort petite, il ſuffira de lui en attribuer une moyenne entre celles de ſon lever & de ſon coucher, & l'on pourra employer un autre calcul, dont j'emprunte la formule du Probl. 32 de l'Aſtron. Nautique. Soit $'X$ la tangente de la déclinaiſon moyenne entre celles X, X', du lever & du coucher de l'aſtre, & $'Y$ ſa cotangente; h étant ſuppoſée $= 0$, nous avons $\frac{rs}{c}$ =

$= \frac{'yu}{'x}$ $\left(= \frac{ru}{'X}\right) = \frac{'Yu}{r}$, parce que $'y : 'x :: 'Y : r$. (C'eſt la derniere valeur de $\frac{rs}{c}$, dont il faut faire uſage dans la pratique, parce qu'elle indique un calcul plus facile que celle $\frac{ru}{'X}$, qui la précede. On va voir pourquoi j'ai préſenté celle-ci).

M. de Maupertuis attribue à l'aſtre, pour le cas où nous ſommes, une des deux déclinaiſons qu'il a aux momens de ſon coucher & de ſon lever, & propoſe de retrancher ou d'ajoûter au tems écoulé entre ces momens, ce que le changement de déclinaiſon apporte de retardement ou d'avancement à l'un de ces momens : mais je m'imagine que le calcul de la hauteur du pole, fait ſelon l'idée que j'ai propoſée, équivaut bien dans tous les cas, à la double opération preſcrite par M. de Maupertuis; c'eſt-à-dire, qu'il donne un réſultat auſſi exact [& je m'étonne même que cet habile homme n'y ait pas penſé]. On peut ſe rappeller ce que j'ai dit ci-deſſus (à la Schol. du Coroll. I.), pour établir la bonté de l'expédient dont il s'agit, & je pourrois m'en tenir à cela ; cependant je vais encore montrer la choſe par une autre voie, afin de lever tout ſcrupule.

Deux quantités, dont la différence eſt petite en comparaiſon de ces quantités, étant élevées chacune au quarré, il eſt aiſé d'appercevoir que la ſomme de ces deux quarrés ne ſurpaſſe que de bien peu le double du produit de ces deux quantités. Soient a, & $a + d$ ces quantités, le double de leur produit eſt $2aa + 2ad$, & la ſomme de leurs quarrés eſt $2aa + 2ad + dd$, qui ne ſurpaſſe la premiere ſomme que du quarré dd, qui eſt bien peu de choſe, & que l'on peut négliger. Nous pouvons donc mettre $2XX'$ au lieu de $XX + X'X'$, dans la formule

rigoureuse $\frac{rs'}{c} = \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' + 2rqXX')}}$, & faisant $'X = \sqrt{XX'}$, nous aurons $\frac{rs}{c} = \frac{rrp}{'X\sqrt{(2rr + 2rq)}}$. Or, je dis que cette valeur de $\frac{rs}{c}$ est précisément la même que celle $\frac{ru}{'X}$, que j'ai proposée ci-dessus : car on a par le Lemme second, & par l'hypothese du cas où nous sommes, $rp = 2ut$, & $pp = \frac{4uutt}{rr} = \frac{4uutt}{tt+uu}$, & $qq = rr - pp = \frac{(tt+uu)^2 - 4uutt}{rr} = \frac{(tt-uu)^2}{rr}$; donc $q = \frac{tt+uu}{r}$, & $rq = tt - uu$. Substituant donc dans la derniere égalité, $2ut$ à rp, $tt - uu$ à rq, & tt à $rr - uu$, nous aurons enfin $\frac{rs}{c} = \frac{2rut}{'X\sqrt{4tt}} =$ &c.

J'ai pris ici $'X$ moyenne géométrique, entre les deux déclinaisons X & X' du lever & du coucher de l'astre : mais il ne sera pas nécessaire dans la pratique de chercher un $'X$ qui soit tel précisément, il faudra prendre la déclinaison qui convient à peu près au tems du *passage* de l'astre par le méridien ; ce qui ne coutera pas plus pour ce tems, que pour un autre quelconque.

Si on supposoit que les observations du lever & du coucher de l'astre se fissent en des lieux différens en latitude, mais de peu différens, la formule $\frac{rs}{c} = \frac{'Yu}{r}$ donneroit assez exactement la latitude moyenne entre celles de ces lieux ; & si leur différence en latitude est connue à peu près, on aura aisément la latitude de l'un ou de l'autre, après avoir trouvé la moyenne (la *justesse* de cette pratique est sensible, par ce que l'on vient de voir à l'égard de la déclinaison). Mais M. de Maupertuis propose un autre procédé pour ce cas ; c'est de retrancher ou d'ajoûter à la durée de l'apparition (ou de

l'occultation) de l'aſtre, ce que le changement de l'Obſervateur en latitude a apporté pour lui d'augmentation ou de diminution à cette durée, après quoi l'on cherchera la hauteur du pole, pour l'un ou l'autre des lieux où le lever & le coucher de l'aſtre ont été obſervés. Or, ce n'eſt qu'à l'aide du calcul différentiel, que M. de Maupertuis trouve la formule $dE = \frac{r^3x}{ccyt} dL$, pour l'altération cauſée à la durée dont il s'agit, par le changement dL de l'Obſervateur en latitude. Le réſultat du procédé expoſé par ce Sçavant, ne peut donc être plus juſte que celui de l'opération que je viens d'indiquer, & celui-là le ſeroit même un peu moins que celui-ci, parce que M. de Maupertuis fait entrer dans la valeur de dE, le coſinus de la hauteur du pole groſſierement déterminée.

(Si les deux lieux où le lever & le coucher de l'aſtre ont été obſervés différoient notablement en latitude, on n'auroit qu'imparfaitement leur latitude moyenne, par la formule $\frac{sr}{c} = \frac{Yu}{r}$, & par conſéquent on n'auroit auſſi qu'imparfaitement leurs latitudes propres. Mais ſi l'on étoit fort curieux d'avoir l'une ou l'autre de ces latitudes avec une grande préciſion, j'avertis en paſſant, qu'on y parviendroit par une équation du quatriéme dégré, pour la tangente de la hauteur du pole de l'un des lieux. Voici les fondemens de cette équation. Soient s & s' les hauteurs du pole pour les deux lieux, c, c' leurs coſinus; δ le ſinus de la différence donnée de ces lieux en latitude, β ſon coſinus; t, t' les ſinus des angles horaires au lever de l'aſtre pour l'un des lieux, & à ſon coucher pour l'autre; u, u' leurs coſinus: on a $u' = \frac{s'X}{c'}$, $u = \frac{sX}{c}$, $t = \frac{1}{c}\sqrt{(rrcc - ssXX)}$; il faut ſubſtituer ces va-

leurs de u', u, t dans l'équation $ru = -qu \pm pt$; puis observant que $rs' = c\delta \pm s\beta$, & que $rc' = s\delta \mp c\beta$, dans le cas où les deux lieux sont de même part de l'équateur, il faut chasser s' & c', par le moyen de ces équations, &c.)

Moins la différence de latitude des deux lieux où le lever & le coucher de l'astre auront été observés sera petite, & moins parfaite sera l'invention de la latitude moyenne entre les leurs. Or, c'est sur mer que l'hypothese du changement de lieu en latitude peut devenir réelle; & plus l'intervalle entre les momens du lever & du coucher de l'astre sera long, plus la différence des lieux où l'on observera ces momens pourra être grande: d'ailleurs cette différence sera connue avec d'autant moins d'exactitude, puisqu'elle ne peut l'être que par estime. Voilà deux nouvelles raisons pourquoi le Navigateur doit observer la durée de l'occultation de l'astre, par préférence à celle de son apparition, lorsque l'astre décline du côté du pole élevé. Et comme le Navigateur peut aussi changer de lieu en longitude (ce qui allonge ou diminue la durée, soit de l'apparition, soit de l'occultation de l'astre, & oblige de la corriger par la soustraction ou l'addition du tems qui répond à la différence des longitudes), il naît encore de-là une raison pour observer la moindre de ces durées, plutôt que la plus grande. Ces mêmes considérations font voir qu'il est à souhaiter que la déclinaison de l'astre soit considérable, sur-tout si la hauteur du pole est petite. Il est vrai que moins la déclinaison de l'astre & la hauteur du pole seront grandes, & moins les irrégularités de la réfraction horisontale en apporteront sur la durée de l'apparition ou de l'occultation de l'astre, & moins par conséquent elles causeront d'erreur par elles-mêmes dans la recherche de la hauteur du

pole; mais d'un autre côté, un même dégré d'erreur dans l'observation de cette durée, en produit une d'autant plus grande dans le calcul de la hauteur du pole, que la déclinaison de l'astre & que cette hauteur sont petites. Ne commît-on donc d'erreur sur la durée de l'apparition ou de l'occultation d'un astre, qu'en conséquence de l'irrégularité de la réfraction horisontale, il n'y a pas d'avantage (ou il y en a peu) à ce que la déclinaison de l'astre soit petite. Au reste, voici le rapport d'une erreur dans la durée dont il s'agit, erreur mesurée par le petit arc dE de l'équateur, à celle dL qui en dérive sur la hauteur du pole.

Nous avons, par l'hypothese, $rsx = cyu$. Faisant varier u, s, c, pendant que x est constant, nous aurons $rxds = cydu + uydc$; mettant pour ds & dc leurs valeurs $\frac{cdL}{r}$ & $-\frac{sdL}{r}$, & pour du sa valeur $\frac{sdE}{r}$, puis substituant à yu sa valeur $\frac{rsx}{c}$, à cyt sa valeur, $r\surd(ccyy - ssxx)$ ou $rr\surd(cc - xx)$, multipliant tout par c, & mettant rr pour $cc + ss$, nous aurons enfin $rxdL = c\surd(cc - xx)\,dE$. Prenons maintenant un exemple ou deux, afin de voir sensiblement le rapport des deux erreurs dL, dE. Soient r, c, x, dans la raison des nombres 8, 5, 3, ce qui suppose que la hauteur du pole est de $51^\circ\,19'$ & la déclinaison de l'astre de $22^\circ\,2'$, & d'où il suit que son angle horaire au moment de son lever ou de son coucher, est de $30^\circ\,21'$, en sorte que la durée de son apparition sur l'horison est de plus de 16 heures, & celle de son occultation de moins de 8 heures. Posé qu'il décline du côté du pole élevé, nous aurons $8 \times 3\, dL = 5\surd(16)\,dE$, ou bien $dL = \frac{5}{6}\,dE$; mais si nous mettons r, c, x, dans la raison des nombres $\frac{410}{9}$, 41, & 9, ce qui suppose que la hauteur du pole est

de 25° 51′, la déclinaiſon de l'aſtre, de 11° 24′, & d'où il ſuit que ſon angle horaire, au moment où il eſt à l'horiſon rationel, eſt ſeulement de 5° 36′, en ſorte que la durée de ſon ſéjour d'un côté de l'horiſon, eſt de 12 heures trois quarts, ou de 11 heures un quart, nous aurons $410\, dL = 41 \times 40\, dE$, ou $dL = 4\, dE$. Et ſi nous ſuppoſons maintenant que l'erreur commiſe ſur le tems écoulé entre les deux paſſages de l'aſtre à l'horiſon rationel, eſt d'une minute d'heure, qui en vaut 15 de l'équateur, l'erreur ſur la hauteur du pole ſera en ce cas d'un dégré.

On peut voir, par ces exemples, juſqu'où on peut compter ſur la propoſition de trouver la hauteur du pole, par l'obſervation de la durée du jour, c'eſt-à-dire, du ſéjour du Soleil au-deſſus de l'horiſon, faite dans l'Aſtron. Nautique [Problème dont on aſſûre qu'*il n'y a que deux jours dans l'année, ſçavoir ceux de l'équinoxe, où l'on ne puiſſe pas le pratiquer.* Préf. *pag.* xxvij]. Au reſte, je dois dire que ma remarque peut bien faire ſentir que cette propoſition doit être limitée, mais que je ne m'ingere point pour cela de prétendre qu'on doive abſolument la rejetter; j'y applaudis au contraire, & c'eſt pour en faciliter la pratique, que je me ſuis engagé dans cette longue digreſſion. En effet, ſi l'on tâche d'obſerver le Soleil au moment du paſſage de ſon centre par l'horiſon rationel, il ne reſtera aucune difficulté qui puiſſe dégoûter de faire uſage de ce Problème, auquel M. de Maupertuis *s'eſt tant appliqué* [pour me ſervir de ſes termes, *pag.* 73], & au ſujet duquel il a donné pluſieurs belles choſes, mais qui, pris d'une certaine façon, eſt moins difficile par ſes circonſtances, qu'il n'a paru d'une premiere vûe à cet habile Aſtronome.

PROBLEME III.

La hauteur d'un astre, & l'angle azymuthal d'un autre étant donnés, avec leurs déclinaisons & le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure de l'observation du premier astre.

Il est encore préalable de trouver la hauteur du pole.

On a, par la premiere formule du premier Lemme, $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$; par conséquent $uu = \frac{r^2(rrhh - 2rshx + ssxx)}{ccyy}$, & $tt = rr - uu = \frac{rr(ccyy - rrhh + 2rshx - ssxx)}{ccyy} = \frac{rr(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}{ccyy}$, & $t = \frac{r}{cy}\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}$. Par le second Lemme on a, dans le cas de la *Fig.* 5, $ru' = qu - pt$, $rt' = qt + pu$; substituant dans ces deux équations les valeurs qu'on vient de voir pour u & t, on a $u' = \frac{qrh - qsx - p\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}}{cy}$, & $t' = \frac{prh - psx + q\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}}{cy}$.

D'un autre côté, on a par la troisieme formule du premier Lemme, $rny't' + rmcx' = msy'u'$, ou, en nommant $N = \frac{rn}{m}$ la cotangente de l'angle azymuthal, & $X' = \frac{rx'}{y'}$ la tangente de la déclinaison, $Nt' + cX' = su'$. Substituant dans cette égalité les valeurs de t' & u', multipliant tous les termes par cy, & substituant $rr - ss$ à cc, on a:

$$\left.\begin{matrix} + X'y \\ - qx \end{matrix}\right\} ss \left.\begin{matrix} + Npx \\ + rqh \end{matrix}\right\} s \begin{matrix} - rrX'y \\ - rNph \end{matrix} = \left.\begin{matrix} ps \\ Nq \end{matrix}\right\} \sqrt{(rryy - rrhh + 2rhxs - rrss)}:$$

& les deux membres de cette égalité étant élevés au quarré, on aura pour s une équation du quatriéme dégré,

sur laquelle je ne m'arreterai pas, parce qu'un Problême dont le calcul est si compliqué, ne peut être d'usage. *Il est de théorie plutôt que de pratique*, & c'est pour ne rien laisser sans discussion de ce qui peut appartenir à mon sujet, que je le présente ainsi que le suivant.

PROBLEME IV.

Les angles azymuthaux de deux astres étant donnés, avec leur déclinaison, & l'intervalle des observations, trouver l'heure, ou la hauteur du pole.

On a, par la troisieme formule du premier Lemme; $Nt+cX=su$, & $N't'+cX'=su'$. Substituant dans la deuxieme de ces égalités les valeurs de t' & u', fournies par le second Lemme, & mettant $\sqrt{(rr-ss)}$ pour c, & $\sqrt{(rr-uu)}$ pour t, il ne restera que deux inconnues, s & u, dont on pourra chasser celle qu'on voudra, puisqu'on a pour elles deux équations; mais l'équation qui en résulteroit pour le Problème, seroit d'un dégré très-élevé, & il est inutile que je m'y arrête.



CHAPITRE

CHAPITRE II.

Moyens de trouver l'heure, la hauteur du Pole étant connue.

PROBLEME V.

LA hauteur du pole, la déclinaison & la hauteur d'un astre étant donnés, trouver l'heure de l'observation.

La premiere formule du premier Lemme, donne $u = \frac{rrh + rsx}{cy}$ pour le cas où l'astre décline du côté du pole abbaissé, $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$ pour le cas où il décline du côté du pole élevé, & est au-dessus du cercle de six heures, &c.

PROBLEME VI.

La hauteur du pole, la déclinaison & l'angle azymuthal d'un astre étant donnés, trouver l'heure de l'observation.

La troisieme formule du premier Lemme, donne $rnyt = \pm msyu \mp rmcx$ pour les cas où l'astre est au-dessus de l'équateur & du cercle de six heures; ou bien $Nt = \pm su \mp cX$. Elevant les deux membres de cette égalité au quarré, & substituant $rr - uu$ à tt, on a

$$\left.\begin{matrix} ss \\ NN \end{matrix}\right\} uu - 2scXu = \left\{\begin{matrix} +rrNN \\ -ccXX \end{matrix}\right., \quad \& \; u = + \frac{scX}{ss+NN} \pm \frac{N}{ss+NN} \sqrt{(rrNN + rrss - ccXX)}.$$

Ces deux valeurs de u sont positives, & la moindre est pour le cas où l'astre est situé du côté du premier vertical, qui regarde le pole élevé ; la plus grande est pour le cas où l'astre est de l'autre côté de ce vertical.

Lorsque l'astre est au-dessous de l'équateur, ou du cercle de six heures, on a $Nt = su + cX$, & $u = -\frac{scX}{ss+NN}$ $+ \frac{N}{ss+NN}\sqrt{(rrNN + rrss - ccXX)}$.

PROBLEME VII.

La hauteur du pole étant connue, & deux astres E, E', dont les déclinaisons & les ascensions droites sont données, étant vûs dans un même vertical, trouver l'heure de l'observation.

Soient X, X' les tangentes des déclinaisons des deux astres, t, t' les sinus de leurs angles horaires, u, u' leurs cosinus ; & soit a le sinus de leur différence d'ascension droite, & b son cosinus.

La troisieme formule du premier Lemme donne, pour le cas où les deux astres sont au-dessus de l'équateur, & du côté du premier vertical, où n'est pas le pole élevé, $\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}$, ou (en supposant que E' est le supérieur des deux astres) $stu' - st'u = cX't - cXt'$. Or par le Lemme second, *Fig.* 8. (où se est l'arc dont le sinus vient d'être nommé a.), $-t'u + tu' = ra$, & $t' = \frac{bt - au}{r} = \frac{bt - a}{r}\sqrt{(rr - tt)}$, on a donc $rras - rcX't + bcXt = acX\sqrt{(rr - tt)}$, & après avoir quarré chaque membre,

$$\left.\begin{array}{l} + rrccXX \\ - 2rbccXX' \\ + rrccX'X' \end{array}\right\} tt \left.\begin{array}{l} - 2r^3acsX' \\ + 2r^2bacsX \end{array}\right\} t = \begin{array}{l} + rraaccXX \\ - r^4aass. \end{array}$$

Et prenant $A = rrccXX - 2rbccXX' + rrccX'X'$, $B = + rracsX' - rbacsX$, & $C = aaccXX - rraass$, on a, pour le ſinus de l'angle horaire de l'aſtre inférieur E,

$$t = \frac{r}{A} B \pm \frac{r}{A} \sqrt{(BB + AC)}.$$

SCHOLIE I. Ce Problème, pour le cas qu'on vient de voir, eſt le XXVIe de l'Aſtron. Nautique : mais il y a cinq autres cas * que M. de Maupertuis n'a pas touchés, & dont il n'eſt peut-être pas hors de propos d'en dire un mot. Les deux aſtres peuvent être du côté du premier vertical, où eſt le pole élevé, ſoit tous deux au-deſſus du cercle de ſix heures, ſoit tous deux au-deſſous, ſoit l'un au-deſſus & l'autre au-deſſous de ce cercle ; & dans chacun de ces trois cas on trouve les termes de l'équation pour t, affectés des mêmes ſignes que ci-deſſus (par exemple, E'' étant au-deſſus du cercle de ſix heures, & E au-deſſous, on a $\frac{su + cX}{t} = - \frac{su' + cX'}{t'}$, & $stu' + st'u = cX't - cXt'$; or dans ce cas, $tu' + t'u = ra$, & $t' = bt + a\sqrt{(rr - tt)}$, poſé que la différence d'aſcenſion droite des deux aſtres ſoit au-deſſous de 90 deg. ce qui eſt le cas de la *Fig. 6*, on a donc $rras - rcX''t + bcXt = - acX\sqrt{(rr - tt)}$, ce qui revient au même que ci-deſſus). En effet, les ſignes doivent être les mêmes dans l'équation pour t, tant que ceux des quantités XX'' ſont les mêmes. Si donc l'une de ces quantités, ou toutes deux, ſont poſées en ſens contraire à celui de ces premiers cas, on doit avoir d'autres ſignes dans l'équation dont il s'agit. Soit, par exemple, E'' au-deſſus de l'équateur, & E au-deſſous, on a $\frac{su + cX}{t} = \frac{su'' - cX''}{t''}$,

* Je ne compte ici que les cas où les deux aſtres ont été vûs de même part du zénith, cas dans leſquels la différence de ces aſtres en aſcenſion droite, eſt moindre que 90 dégrés, pour l'ordinaire.

& $stu'' - st''u = cX''t + cXt''$. Or, $tu'' - t''u = ra$, & t'' $= bt - a\sqrt{(rr - tt)}$, donc $rr.as - rcX''t - bcXt =$ $- acX\sqrt{(rr - tt)}$, &

$$\left.\begin{matrix} + rrccXX \\ + 2brccXX'' \\ + rrccX''X'' \end{matrix}\right\} tt \left.\begin{matrix} - 2r^3 acsX'' \\ - 2br^2 acsX \end{matrix}\right\} t = \begin{matrix} rraaccXX \\ - r^4 aass \end{matrix}.$$

Si les deux aſtres ſont au-deſſous de l'équateur, les termes du coefficient de tt ont les mêmes ſignes que dans les premiers cas; mais l'on a $+ 2r^3acsX'' - 2br^2acsX$, pour coefficient de t.

II. Nous avons deux valeurs pour le ſinus de l'angle horaire de l'aſtre inférieur; il s'agit de voir s'il n'y auroit point lieu de ſe méprendre dans le choix qu'il faut faire entre ces valeurs, & ſe prémunir contre ce danger. Je remarque donc que les aſtres qui peuvent ſe trouver dans un même vertical, pour les endroits qui ont une certaine latitude, ne ſe rencontrent pas ainſi une ſeule fois dans leur révolution journaliere, mais deux fois. Pour dire la choſe autrement, ſi le grand cercle de la ſphere ſur lequel ſont deux aſtres, peut paſſer par le zénith de quelque endroit, il y paſſe deux fois en 24 heures. Il eſt vrai que deux aſtres qui étoient dans certaine poſition à l'égard du zénith & de l'horiſon, lorſqu'ils ſe ſont rencontrés une fois à un même vertical, peuvent n'être pas dans la même poſition, lorſque le grand cercle ſur lequel ils ſont, paſſera une deuxieme fois par le zénith. Si c'eſt par le ſens de la vûe, & à l'aide d'un fil à plomb, que l'on ſçait que deux aſtres ont été dans le même vertical en certain moment, il faut qu'ils aient été alors au-deſſus de l'horiſon, & de même part du zénith; & il peut ſe faire que dans leur ſeconde rencontre, à un même vertical, ils ſoient de part & d'autre du zénith, ou bien que celui qui étoit ſupérieur à l'autre dans la

premiere rencontre, lui soit inférieur dans la seconde, &c. mais il est possible aussi que dans l'une & l'autre, le même astre soit supérieur, &c.

Si l'astre dont on cherche l'angle horaire, n'est pas de même part du méridien dans ses deux rencontres à un même vertical avec l'autre astre, les racines de notre équation pour t doivent être de qualités contraires, & c'est la positive qui convient au cas observé : la négative est pour le cas de l'autre rencontre, & on l'eût trouvée positive, si on eût fait le calcul directement pour ce cas.

Mais si l'astre dont on cherche l'angle horaire, est du même côté du méridien dans l'une & l'autre rencontre, les deux racines de notre équation doivent être positives, & il faut sçavoir choisir entre elles. Je remarque sur cela que dans ce cas, c'est de différens côtés du premier vertical, qu'est situé l'astre dont on demande l'angle horaire, en ses deux rencontres avec l'autre astre à un même vertical. Il faut donc considérer de quel côté du premier vertical a été observé l'astre dont on cherche l'angle horaire. *Si* ç'a été du côté où est le pole élevé, c'est la plus grande des deux racines qui est la vraie valeur de t : si c'est de l'autre côté du premier vertical, & au-dessus de l'équateur, qu'a été observé l'astre, c'est la moindre des deux racines qui est la vraie valeur de t. Enfin, si c'est au-dessous de l'équateur que l'astre a été observé, c'est la plus grande racine qui se retrouve vraie valeur du sinus demandé. Je remarque au reste, que les deux racines positives, peuvent être utiles à l'égard de certains astres, entre ceux qui déclinent du côté du pole élevé, parce que ces astres peuvent se trouver au-dessus de l'horison, dans leur double rencontre dont il s'agit ; mais que d'autres étant plongés sous l'horison dans l'une de ces rencontres, une seule des racines positives sera utile à leur

égard. Il n'y a pareillement qu'une seule des racines positives qui puisse être d'usage, à l'égard des astres qui déclinent du côté du pole abbaissé. Or, ce n'est pas un défaut au calcul, de fournir dans le cas en question deux valeurs positives pour le sinus de l'angle horaire de ces astres. Le calcul roule sur la supposition que deux astres sont dans un même vertical, on laisse à l'écart la considération de leur hauteur. Il n'importe donc pour la *justesse* du résultat du calcul, que la hauteur de l'astre dont on cherche l'angle horaire, soit positive ou négative, c'est-à-dire, qu'il soit au-dessus ou au-dessous de l'horison : il suffit, pour avoir deux valeurs positives de l'angle horaire d'un astre, qu'il soit de même part du méridien au moment de ses deux rencontres avec un autre astre à un même vertical. C'est seulement par la nature des observations que le service de la formule qui contient cette double valeur positive est limité.

Au lieu de former une équation pour le sinus de l'angle horaire de l'un des astres, on pourroit en faire une pour le cosinus de cet angle, & l'on seroit pareillement obligé d'entrer dans de certaines discussions, pour faire un bon choix entre les deux valeurs qu'on trouveroit pour ce cosinus.

III. L'équation pour t ne se borne pas aux cas où les deux astres sont de même part du zénith (cas qui sont les seuls qui puissent être observés à l'aide d'un simple fil à plomb), elle embrasse ceux-mêmes où les deux astres sont de différens côtés de ce point. C'est pourquoi je proposerai dans la suite un moyen d'observer des astres *ainsi* disposés à leur rencontre à un même vertical. Si ce moyen (ou quelqu'autre de même fin) est mis en usage, il faudra prendre garde que la différence des deux astres en ascension droite, pourra alors être plus grande que 90 degrés ;

& que le cosinus b de cette différence, deviendra dans ce cas une quantité négative, ce qui obligera à changer les signes des termes où elle se trouvera linéaire.

IV. Le Probleme dont il s'agit, étant un des plus utiles par la qualité de l'observation qu'il suppose; mais conduisant, par la solution algébrique & directe qu'on vient d'en voir, à un calcul fort compliqué pour la pratique, je donnerai dans la suite un moyen indirect de le résoudre, qui sera assez simple, certaines Tables, qui auront plus d'un usage, étant une fois faites.

V. *Il* n'est pas nécessaire pour le Probleme proposé, que les deux astres aient été vûs dans un même vertical au même moment; c'est la même solution, si ces astres ont passé par certain vertical en momens différens, pourvû qu'on connoisse le tems écoulé entre ces passages. Alors a dans la formule, ne marquera pas simplement le sinus de la différence d'ascension droite des deux astres, mais il marquera le sinus de la somme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les deux observations, & de *celui* qui répond à la différence d'ascension droite des deux astres. (J'ai spécifié au Probleme second, en quel cas il faut prendre la somme de ces angles, & en quel cas il faut prendre leur différence. C'est une regle générale pour toutes les observations qui ne sont pas contemporaines.)

COROLLAIRE I. On peut observer le tems écoulé entre les deux passages d'un même astre par le même vertical; & nommant $o = r \mp b$, le sinus verse de l'angle de ce tems, on aura:

$$2orccXXtt - 2orracsXt = rraaccXX - r^4aass;$$

$$\& \ t = \frac{ras \pm ra}{2cX} \sqrt{\left(ss + \frac{2ccXX - rrss}{or}\right)}.$$

COROLLAIRE II. Si (E), l'un des deux astres E, E',

vûs dans un même vertical, eſt dans l'équateur, on aura $t = \frac{ras}{cX'}$, ou (en prenant $S = \frac{rs}{c}$ pour la tangente de la hauteur du pole), $t = \frac{aS}{X'}$.

COROLLAIRE III. Si la différence d'aſcenſion droite des deux aſtres vûs dans un même vertical, eſt nulle, ou de 180 dégrés, ce qui rend $a = 0$, on a auſſi $t = 0$; c'eſt-à-dire, que les deux aſtres ſont au méridien. Ce cas eſt celui du Probleme XXVII de l'Aſtronomie Nautique.

PROBLEME VIII.

La hauteur du pole étant connue, & le tems écoulé entre les paſſages de deux aſtres au même almicantarath étant auſſi connu, ainſi que les déclinaiſons & les aſcenſions droites de ces aſtres, trouver l'heure des obſervations.

(Ce Probleme eſt l'inverſe du XXIX[e] de l'Aſtronomie Nautique, qui conſiſte à trouver la hauteur du pole, connoiſſant l'heure à laquelle on voit dans un même almicantarath, deux aſtres, &c.)

Soient, comme ci-deſſus, a & b le ſinus & le coſinus de la ſomme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les obſervations, & de celui auquel répond la différence d'aſcenſion droite des deux aſtres. La premiere formule du premier Lemme, donne pour le cas où les aſtres ſont au-deſſus de l'équateur, & du cercle de ſix heures, $rsx + cyu = rrh = rsx' + cy'u'$; on a donc $rsx - rsx' + cyu = cy'u'$, en ſuppoſant que x' eſt moindre que x. Soit donc que les deux aſtres ſoient de même part du méridien, ce qui eſt le cas de la *Fig.* 8, ſoit qu'ils ſoient de différens côtés de ce cercle, & dans le cas de la *Fig.* 7, on a, par le ſecond Lemme, $u' = bu + a\sqrt{(rr - uu)}$, donc

rrs

$rrs(x - x') + rcyu - bcy'u = acy' \sqrt{(rr - uu)}$: quarrant chaque membre, & ſubſtituant rr à $aa + bb$ on a,

$$\left.\begin{matrix} + rrccyy \\ - 2brccyy' \\ + rrccy'y' \end{matrix}\right\} uu \left.\begin{matrix} + 2r^3 scy(x - x') \\ - 2br^2 scy'(x - x') \end{matrix}\right\} u = \left\{\begin{matrix} + rraaccy'y' \\ - r^4 ss(x - x')^2. \end{matrix}\right.$$

Prenant $A = rcc(ryy - 2byy' + ry'y')$, $B = rsc(-ry + by')(x - x')$, & $C = aaccyy - rrss(x - x')^2$, on aura,

$$u = \frac{rB}{A} \pm \frac{r}{A} \sqrt{(BB + AC)}.$$

SCHOLIE. On comprend ſans doute, que ſi quelqu'une ou pluſieurs des quantités b, x, x' ſont de qualité contraire à celle qui a été ſuppoſée dans le calcul précédent, il faut changer les ſignes des termes où elles ſe rencontrent, ainſi qu'il a été expliqué ſous le Probleme ſecond.

Nous avons deux valeurs pour u, & cela fait voir que ſi deux aſtres paſſent à un même almicantarath en même moment, ou avec certain tems d'intervalle, il y a quelqu'autre almicantarath où ces aſtres ſe rencontreront en même moment, ou paſſeront avec le même tems d'intervalle. Or, les deux valeurs de u peuvent non-ſeulement être l'une poſitive, & l'autre négative, mais auſſi toutes deux poſitives; & dans ce cas, il y a un choix à faire, lequel exige certaines attentions. Je ſuppoſe, pour être plus court, que les deux aſtres ont paſſé au même almicantarath au même inſtant. Soient ici PE, PE' les complémens des déclinaiſons des deux aſtres E, E'; ſoit EQE' Fig. 40.
l'arc de grand cercle de la ſphere qui joint ces deux aſtres, & PQ un autre arc de grand cercle, qui paſſe par le pole, & par le milieu de EQE'. Si PQ eſt plus grand que le complément de la hauteur du pole, le point Q, mitoyen entre les deux aſtres, ſe trouvera de même part du méridien

aux deux rencontres des deux astres à un même almicantarath, mais il sera de différens côtés du premier vertical. Si ce point a été, au moment de l'observation, du côté du premier vertical où est le pole élevé, & que les deux racines de l'équation soient positives, c'est la moindre de ces racines qui est la vraie valeur de u. Si au contraire le point Q a été de l'autre côté du premier vertical au tems de l'observation, c'est la plus grande des deux racines qui convient à ce tems.

Si PQ est moindre que le complément de la hauteur du pole, le point Q, mitoyen entre les deux astres, sera du côté du premier vertical où est le pole élevé, & de différens côtés du méridien, aux deux rencontres des astres à un même almicantarath. Dans ce cas, il faut considérer lequel des deux astres est le plus près du méridien au tems de l'observation. Si c'est le plus voisin du pole qui soit aussi le plus proche du méridien, & que l'on ait deux racines positives, c'est la plus grande de ces racines qui est la vraie valeur de u pour ce tems (quel que soit celui des deux astres auquel appartienne u) : que si c'est l'astre le plus éloigné du pole qui est le moins éloigné du méridien au moment de l'observation, c'est la moindre des racines qui est valeur de u à ce moment.

On trouvera dans la suite, un moyen de faire un calcul plus simple pour ce Probleme, dans le cas où les deux astres passent en même moment au même almicantarath, & de discerner plus facilement la quantité qui fait connoître l'heure de l'observation.

Remarque. On trouve l'heure dans les deux Probl. précédens, par la supposition que la différence de hauteur de deux astres est zéro, soit en même tems, soit en des momens dont l'intervalle est connu, ou par la supposition que l'angle des azymuths de deux astres est pareille-

ment zéro, soit en même tems, soit en des momens dont l'intervalle est connu. On peut donc juger que la différence de hauteur de deux astres, ou bien l'angle de leurs azymuths, sont des élémens propres (au moins spéculativement) à faire découvrir l'heure par leur combinaison avec quelqu'autre élément. C'est ce qui est vrai en effet, & j'en vais donner un exemple dans les deux Problemes suivans, qui sont plutôt de théorie que de pratique.

PROBLEME IX.

La hauteur du pole étant connue, & l'angle des azymuths où sont deux astres, en des momens dont l'intervalle est connu, étant donné, ainsi que les déclinaisons & les ascensions droites de ces astres, trouver l'heure de l'une des observations.

Soit g le sinus de l'angle des azymuths des deux astres, γ son cosinus, a le sinus de la somme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations, & de celui qui répond à la différence des deux astres en ascension droite; b le cosinus de cette somme ou de cette différence; X, X' les tangentes des déclinaisons des deux astres; m, m' les sinus de leurs angles azymuthaux, &c.

La troisieme formule du premier Lemme donne, $n = \frac{m}{rt}(su - cX)$, & $nn = rr - mm = \frac{mm}{rrtt}(su - cX)^2 = \frac{(rr - nn)}{rrtt}(su - cX)^2$; donc $n = \frac{r(su - cX)}{\sqrt{(rrtt + (su - cX)^2)}}$, & $m = \frac{r^2 t}{\sqrt{(rrtt + (su - cX)^2)}}$. Par la même raison, $m' = \frac{r^2 t'}{\sqrt{(rrt't' + (su' - cX')^2)}}$. Or par le second Lemme, on a $rm' = \gamma m \pm gn$; substituant dans cette égalité, les valeurs qu'on vient de voir, de m', m, n, on en aura une

où il ne restera d'inconnues que t', u', t, u. On pourra chasser les deux premieres, en prenant leurs valeurs dans les égalités $rt' = bt - au$, $ru' = bu + at$, &c.

PROBLEME X.

La hauteur du pole étant connue, & la différence des hauteurs où sont deux astres en des momens dont l'intervalle est connu, étant donnée, &c. trouver l'heure de l'une des observations.

Soit f le sinus de la différence des deux hauteurs h, h'; l son cosinus, &c. On a, par la premiere formule, $h' = \frac{cy'u' + rsx'}{rr}$, $h = \frac{cyu + rsx}{rr}$, $k = \sqrt{(rr - hh)} = \frac{1}{rr} \sqrt{(r^6 - (cyu + rsx)^2)}$. Substituant ces valeurs de h', h, k, dans l'égalité $rh' = lh - fk$, que fournit le second Lemme, on aura $rcy'u' + rrsx' - lcyu - rlsx = f\sqrt{(r^6 - (cyu + rsx)^2)}$, où il faut substituer la valeur de ru', que fournit encore le second Lemme, &c.



CHAPITRE III.

Suite des moyens de trouver l'heure, concurremment avec la hauteur du Pole.

L'UNE des especes d'élémens employées dans les Problemes VII & VIII, peut être prise deux fois, ou être combinée, soit avec l'autre, soit avec un des élémens employés dans les Problemes IX & X, &c. & cela donne autant de moyens de trouver l'heure, concurremment avec la hauteur du pole. Il nous reste donc quantité de Problemes pour ce Chapitre : mais il suffira de résoudre les plus avantageux, & d'indiquer les autres.

PROBLEME. XI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre astres E, E', ε, ε', *& l'intervalle de tems entre les momens où* E *se trouve dans un même vertical avec* E', *& où* ε *se trouve dans un même vertical avec* ε', *trouver l'heure de l'une des observations (& la hauteur du pole.)*

(Ce Probleme est une extension du XXXe de l'Astronomie Nautique, où l'on ne suppose que trois astres, mais il ne demande pas un autre calcul.)

Soient les tangentes des déclinaisons des quatre astres X, X', ξ, ξ' ; les sinus & cosinus des angles horaires du premier & du second, t, t', u, u' ; les sinus & cosinus des angles horaires du troisieme & du quatrieme θ, θ', v, v' ; p & q, les sinus & les cosinus de la somme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations

des aſtres E, e, & de l'angle qui répond à leur différence d'aſcenſion droite ; a & b le ſinus & le coſinus de la différence d'aſcenſion droite, des aſtres E, E' ; a', b', le ſinus & le coſinus de la différence d'aſcenſion droite des deux autres aſtres. (Si E & E' ne ſe trouvent pas au même inſtant au même vertical, a & b doivent être les ſinus & coſinus de la ſomme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre leurs paſſages, & de celui qui répond à leur différence d'aſcenſion droite. Il faut entendre le même pour a' & b', ſi, &c.)

Je ſuppoſe que les quatre aſtres déclinent tous du côté du pole élevé, que les angles dont p, a, a' ſont les ſinus, ſont tous aigus, &c. On aura, par la troiſieme formule du premier Lemme $\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}$, $\frac{sv - c\xi}{\theta} = \frac{rn'}{m'} = \frac{sv' - c\xi'}{\theta'}$, & par conſéquent $su't - sut' = cX't - cXt'$, $sv'\theta - sv\theta' = c\xi'\theta - c\xi\theta'$, ou $\frac{X't - Xt'}{u't - ut'} = \frac{s}{c} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{v'\theta - v\theta'}$, ou (parce que $ra = u't - ut'$, & $ra' = v'\theta - v\theta'$ par le ſecond Lemme) $\frac{X't - Xt'}{a} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{a'}$, ou $a'X't - a'Xt' = a\xi'\theta - a\xi\theta'$, ou (à cauſe de $rt' = bt - au$, & de $r\theta' = b'\theta - a'v$), $a'bXt - a'aXu - ra'X't = ab'\xi\theta - aa'\xi v - ra\xi'\theta$. Mais l'angle horaire, dont θ eſt le ſinus, étant ſuppoſé moindre que celui auquel appartient t ; & v étant par conſéquent $> u$, on a, par le ſecond Lemme, & par la ſuppoſition que p appartient à un angle aigu, cas de la *Fig.* 8, $r\theta = qt - pu$, $rv = qu + pt$; & mettant les valeurs de θ & de v dans l'équation précédente, on trouve pour la cotangente de l'angle horaire du premier aſtre,

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{ra'bX - rra'X' - ab'q\xi + a'ap\xi + raq\xi'}{ra'qX - a'aq\xi - ab'p\xi + rap\xi'}\right).$$

Mais si l'on suppose que $\theta > t$, & que $v < u$; par conséquent, ce qui est le cas de la *Fig.* 5, on aura $r\theta = qt + pu$, $rv = qu - pt$, & on trouvera pour cotangente de l'angle désiré :

$$\frac{ru}{s} = r\left(\frac{ra'bX - rra'X' - ab'q\xi - a'ap\xi + raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi + ab'p\xi - rap\xi'}\right).$$

Et si l'on suppose qu'on soit dans le cas de la *Fig.* 7, on aura $r\theta = -qt + pu$, $rv = qu + pt$, & on trouvera,

$$\frac{ru}{s} = r\left(\frac{ra'bX - rra'X' + ab'q\xi + a'ap\xi - raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi + ab'p\xi - rap\xi'}\right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier astre, on a aussi l'angle horaire du second, par l'équation $rt' = bt - au$, supposée ci-dessus, & la hauteur du pole, en substituant les valeurs de t & de t', dans l'équation $\frac{s}{e} = \frac{X't - Xt'}{ar}$).

SCHOLIE I. *Ce Probleme*, au témoignage de M. de Maupertuis, *peut être d'une grande utilité sur terre & sur mer, parce qu'il n'y a point d'observation plus facile ni plus sûre, que celle du passage des astres par un vertical, & qu'on évite ici entierement l'effet de la réfraction, qui apporte tant de troubles aux autres observations* : mais on doit reconnoître aussi, qu'il exige une grande attention aux circonstances des observations, quand on y procede algébriquement, pour donner les signes convenables à chacun des neuf termes dont est composée la fraction qui est la valeur de la cotangente de l'angle horaire désiré. J'ai supposé que tous les astres étoient, non-seulement au-dessus de l'équateur, mais aussi au-dessus du cercle de six heures ; que t outre cela étoit plus grand que t', & θ plus grand que θ' ; enfin, que p appartenoit à un angle aigu : & après tout cela, il reste encore lieu à trois différences

de circonstances [dont la premiere est la seule à laquelle on ait eu égard dans l'Astronomie Nautique]. J'ai eu quelque envie de parcourir tous les cas possibles, & de les réduire sous autant de chefs, qu'il peut y avoir d'états différens pour la formule précédente, en supposant que tous les astres déclinent du côté du pole élevé, en sorte qu'il n'y eût à changer dans ces formules particulieres, que les signes de l'une ou de plusieurs des tangentes X, X', z, z', au cas qu'un ou plusieurs des astres observés, déclinassent du côté du pole abbaissé; mais j'ai craint que ce détail ne fût trop long (je le donnerai pourtant, si on le souhaite), & j'ai pensé qu'un Navigateur, avec une médiocre teinture d'algebre, pourroit bien construire, sur le modele des formules précédentes, celles dont il aura besoin dans l'occasion. Son opération n'en sera que plus sûre, & je ne sçai si on devroit compter sur celle que feroit un autre Navigateur d'après une formule choisie entre plusieurs qu'il trouveroit toutes construites dans un livre. Il n'est pas particulier à la Trigonométrie, avouons-le avec franchise (& j'ai quelque droit de le dire, après les remarques faites sur les Problemes II, VII & VIII ci-dessus), il n'est pas particulier, dis-je, à la Trigonométrie, de donner *des regles dont l'origine peut n'être gueres présente à l'esprit d'une partie de ceux qui s'ingerent de les pratiquer, & dont l'application est souvent ambigue pour certains génies.* Il y a des écueils en plus d'une plage, & un homme pourroit

Incidere in Scyllam cupiens vitare Charibdim.

Heureux le genre humain, s'il y avoit des arts dont les préceptes pussent être *contenus dans quelques lignes*, & ne laissassent lieu à aucune méprise dans leur application.

II.

II. Outre l'embarras du choix des signes qui doivent être employés dans la formule ci-dessus, ou dans les égalités sur lesquelles on en construiroit d'autres, il est à remarquer qu'elle conduit à un calcul assez compliqué, & peu commode, par conséquent, en pratique. C'est pourquoi j'indiquerai dans la suite une autre solution pour ce Probleme, solution qui sera plus simple, & moins sujette à embarras.

III. On pourroit (comme a fait M. de Maupertuis) ne supposer que trois astres, en prenant E & ε pour le même, ce qui rendroit ξ la même chose que X; mais il faut dans ce cas, qu'il y ait certain intervalle de tems entre les passages de cet astre aux deux verticaux, où il doit se rencontrer avec chacun des deux autres astres. Or, cela est à la vérité indifférent sur terre, mais il n'en est pas de même sur mer; il est à souhaiter que toutes les observations que requiert une recherche Nautique, soient contemporaines, ou faites en des momens peu éloignés. Or, en prenant quatre astres, les deux passages de ces deux paires d'astres à deux verticaux, peuvent se rencontrer au même instant, ou en des instans si voisins, que le déplacement du vaisseau dans leur intervalle soit de très-petite conséquence. On peut encore sur terre ne prendre que deux astres pour le Probleme dont il s'agit.

IV. (Ceci regarde la recherche de la hauteur du pole. Si $a = 0$, c'est-à-dire, si le vertical où deux astres ont été observés, est le méridien, on a $t = 0$, & $\theta = p$, & $v = q$. Mettant ces valeurs de θ & v dans l'égalité que fournit le second Lemme pour ε', puis substituant les valeurs de ε & ε' dans l'équation $\frac{s}{c} = \frac{\xi'\varepsilon - \xi\varepsilon'}{a'}$, on aura ainsi la tangente de la hauteur du pole, que l'autre équation pour $\frac{s}{c}$ ne peut donner, parce que tous les termes y sont zéro.)

PROBLEME XII.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de quatre aſtres E, E′, ε, ε', *& le tems écoulé entre les momens où* E *ſe trouve dans un même almicantarath avec* E′, *& où* ε *ſe trouve dans un même almicantarath avec* ε', *trouver l'heure de l'une des obſervations, (& la hauteur du pole.)*.

Soient x, χ', i, i' les ſinus & coſinus des déclinaiſons des aſtres ε, ε', & le reſte comme ci-deſſus, on a en certains cas, par la premiere formule du premier Lemme, $rsx + cyu = rrh = rsx' + cy'u'$, & $rs\chi + c\iota v, = rrh' = rs\chi' + c\iota' v'$, par conſéquent $\frac{y'u' - yu}{x - x'} = \frac{rs}{c} = \frac{i'v' - iv}{\chi - \chi'}$, ou (mettant pour abréger z pour $x - x'$, ζ pour $\chi - \chi'$) $\zeta y'u' - \zeta yu = zi'v' - ziv$; or en certains cas, *on a* $ru' = bu - at$, & $rv' = b'v - a'\theta$. Mettant les valeurs de u' & de v', tirées de ces deux égalités, dans la précédente on a

$$\zeta y'bu - \zeta yat - r\zeta yu = b'zi'v - a'zi'\theta - rziv.$$

Or en certain cas, on a $r\theta = qt - pu$, & $rv = qu + pt$; mettant donc les valeurs de θ & v dans l'équation précédente, on trouve pour la tangente de l'angle horaire du premier aſtre,

$$\frac{rt}{u} = \left(r \left(\frac{rr\zeta y - rb\zeta y' - rqzi - a'pzi' + b'qzi'}{-ra\zeta y + rpzi + a'qzi' - b'pzi'} \right) \right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier aſtre, on a auſſi l'angle horaire du ſecond, par l'équation $ru' = qu - pt$, ou telle autre qui conviendra, & la hauteur du pole en ſubſtituant les valeurs de u & de u', dans l'équation $\frac{rs}{c} = \frac{y'u' - yu}{x - x'}$).

SCHOLIE. La plûpart des remarques faites ſur le Probleme précédent, conviennent à celui-ci.

PROBLEME XIII.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de quatre aſtres E, E′, ι, ι', *& le tems écoulé entre les momens où* E *ſe trouve dans un même vertical avec* E′, *& où* ι *ſe trouve dans un même almicantarath avec* ι', *trouver l'heure de l'une des obſervations, (& la hauteur du pole.)*

On a en certains cas, par la premiere formule du premier Lemme,

$$rsx + civ = rrh' = rsx' + ci'v', \text{ donc } \frac{rs}{c} = \frac{i'v' - iv}{\zeta}.$$

Et par la troiſieme formule du même Lemme;

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}, \text{ donc } \frac{rs}{c} = r\left(\frac{X't - Xt'}{u't - ut'}\right) = \frac{X't - Xt'}{a},$$

donc $ai'v' - aiv = \zeta X't - \zeta Xt'$. Or, on a en certains cas, par le ſecond Lemme, $rv' = b'v - a'\iota$, & $rt' = b't - a'u$. Mettant les valeurs de v' & de t', tirées de ces égalités dans la précédente, on a

$$ab'i'v - aa'i'\iota - raiv = r\zeta X't - b\zeta Xt + a\zeta Xu;$$

& ſubſtituant dans cette équation les valeurs de ι & v, que fournit le ſecond Lemme en certain cas ($r\iota = qt - pu$, $rv = qu + pt$), on trouve pour la cotangente de l'angle horaire du premier aſtre,

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{rb\zeta X - rr\zeta X' - rapi - aa'qi' + ab'pi'}{ra\zeta X + raqi - aa'pi' - ab'qi'}\right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier aſtre, on a auſſi celui du ſecond, & l'on en déduit la hauteur du pole, comme dans le Probl. XI.)

SCHOLIE. Ce Probleme peut être d'une utilité

presque aussi grande que le XIe, au moins sur terre, parce qu'on évite entierement l'effet de la réfraction dans l'une des observations, & que dans l'autre on n'est exposé qu'à la petite irrégularité qui peut provenir, dans la réfraction, de la diversité de constitution de l'atmosphere en différens verticaux. D'un autre côté, ce Probleme a quelque avantage sur l'onzieme, même pour les besoins nautiques, parce que trois astres peuvent absolument y suffire, celui que l'on observe dans un même vertical avec un second, pouvant se rencontrer dans un même almicantarath avec un troisieme au même instant, ou dans un tems peu éloigné. Pareil avantage se trouve dans le Probleme précédent : trois astres vûs ensemble au même almicantarath, ou vûs, le premier avec le second, & le premier avec le troisieme dans des almicantaraths fort voisins, y suffisent parfaitement, si ces astres sont à certaines distances, & deux paires d'astres y conviendroient moins, si elles étoient l'une au-dessus de l'autre, ou à peu près. On verra dans la Partie suivante, le fondement de ces remarques : le reste de celles qui ont été faites sur le Probl. XI, convient encore à celui-ci.

PROBLEME XIV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois astres, E, E', ε, *& le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même vertical, & celui où l'on a observé la hauteur du troisieme, trouver l'heure de l'une des observations (& la hauteur du pole).*

Je cherche en premier lieu la hauteur du pole. Outre les dénominations employées ci-dessus, soient p' & q' le sinus & le cosinus de la somme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations des astres E', ε, &

de la différence de ces astres en ascension droite.

On a en certains cas, par la troisieme formule du premier Lemme $su't - sut' = cX't - cXt'$, ou $ras = cX't - cXt'$, ou 1° (à cause de $rt' = bt - au$), $rras = rcX't - bcXt + acXu$. 2°. On a d'ailleurs par le second Lemme $rv = q'u' - p't'$, ou $\frac{rv + p't'}{q'} = u' = \frac{bu - at}{r}$, donc $rp't' = bq'u - aq't - rrv$, & $t' = \frac{bq'u - aq't - rrv}{rp'}$. Substituant cette deuxieme valeur de t' dans l'égalité $ras = cX't - cXt'$, on a $rrp'as = rp'cX't + aq'cXt + rrcXv - bq'cXu$. Or, on a encore par le second Lemme, $rv = qu - pt$, ou $\frac{rv + pt}{q} = u$. Substituant cette valeur de u dans les deux égalités où entre ce cosinus, on a $rrqas - racXv = ct(rqX' - bqX + apX)$, & $rrp'qas - rrqcXv + rq'bcXv = ct(rp'qX' + aqq'X - bpq'X)$, ou

$$\frac{rp'qas - rqcXv + q'bcXv}{rp'qX' + aqq'X - bpq'X} = \frac{ct}{r} = \frac{rrqas - racXv}{rrqX' - rbqX + rapX};$$

ou en mettant, afin d'abréger, A au lieu du dénominateur de la premiere fraction, & B au lieu de celui de la deuxieme,

$$Brp'qas - BrqcXv + Bq'bcXv = Arrqas - AracXv,$$ ou

$$(AraX + Bq'bX - BrqX)cv = (Araq - Bp'aq)rs,$$ ou,

en mettant C pour la quantité qui multiplie cv, & D pour celle qui multiplie rs, $\frac{Drs}{C} = cv = \frac{rrh - rsx}{i}$, par la formule premiere du premier Lemme, donc $iDs + xCs = rhC$, & $s = \frac{rhC}{iD + xC}$.

Ayant trouvé la hauteur du pole, on aura l'angle horaire de l'astre s, par l'équation $v = \frac{rrh - rsx}{ci}$.

SCHOLIES. I. On doit voir que la formule de ce Probleme eſt ſuſceptible de divers ſignes, de même que celles des Problemes précédens.

II. La méthode de ce Probleme eſt aiſée à appliquer à celui où l'on auroit l'obſervation de deux aſtres à un même almicantarath, combinée avec l'obſervation de la hauteur d'un troiſieme aſtre.

III. La ſolution que je viens de donner, conduiroit à un calcul compliqué & pénible pour la pratique : c'eſt pourquoi j'en propoſerai une autre dans la Partie ſuivante.

PROBLEME XV.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de trois aſtres, E, E′, ε, *& l'angle compris entre le vertical, où les deux premiers ſe trouvent en certain moment, & le vertical du troiſieme aſtre, trouver l'heure, (& la hauteur du pole.)*

REMARQUE. Au défaut de l'une des obſervations néceſſaires, au XI ou au XIIIe Probl. celui-ci peut, ſi je ne me trompe, être utile ſur mer, parce que l'on évite l'effet de la réfraction dans les obſervations qu'il ſuppoſe, & que ces obſervations n'exigent pas que l'horiſon ſoit découvert, ou ne l'exigent pas plus qu'aucune autre eſpece d'obſervation. Celle de l'angle compris entre deux azymuths, eſt ſans doute la plus difficile, ou bien la moins ſûre des deux dont il s'agit : mais elle eſt peut-être ſuſceptible d'une exactitude ſuffiſante, ſurtout ſi l'aſtre ſolitaire dans ſon azymuth, eſt fort bas, & l'un des deux autres auſſi ; d'ailleurs je ne la propoſe que pour ſervir au défaut de toute autre qu'on jugera plus ſûre. De plus, cette eſpece d'obſervation n'eſt pas une choſe nouvelle & inuſitée ſur mer ; on y cherche la déclinaiſon de la bouſſole, & il faut, pour la trouver, obſerver l'angle de l'azymuth

de quelque aſtre, & de l'un des azymuths de la bouſſole, &c. Au reſte, la ſolution de ce Probleme, par la méthode genérale ſuivie juſqu'ici, ſeroit trop compliquée pour être miſe en pratique : ainſi je la laiſſe, & me réſerve d'en donner une plus commode dans la ſuite. Je laiſſe pareillement ici ſans ſolution, le Probleme ſuivant.

PROBLEME XVI.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de deux aſtres, E, E′, *& l'angle compris entre leurs azymuths au moment où ils ſont dans un même almicantarath, trouver l'heure, (& la hauteur du pole).*

REMARQUE. Il reſte quelques autres combinaiſons d'hypotheſes, dans leſquelles l'heure & la hauteur du pole ſe trouvent déterminées, combinaiſons que j'ai déja indiquées en général, & qu'il n'eſt pas difficile d'imaginer, après celles qu'on a vûes : mais je m'abſtiens d'en faire le détail, ſoit parce qu'elles ſont moins avantageuſes que les précédentes, ſoit parce qu'il ne ſera pas difficile à ceux qui pourroient le ſouhaiter, de réſoudre quelques-uns de ces cas, par les voies qui ſeront employées dans la Partie ſuivante. Je finis celle-ci par la ſolution d'un Probleme qui peut avoir ſon utilité, au défaut des précédens, en ce que l'on y évite une partie des mauvais effets de la réfraction en certains cas.



PROBLEME XVII.

La hauteur d'un astre E, *& l'angle de son azymuth avec celui d'un autre astre* E′ *étant donnés, ainsi que le tems écoulé entre les deux observations, &c. trouver l'heure, (& la hauteur du pole).*

REMARQUE. Si on vouloit résoudre ce Probleme directement, on tomberoit dans une équation du quatrieme degré pour le moins : mais l'on peut y procéder indirectement, & l'opération en sera plus simple, quoiqu'elle renferme un circuit. Ce procedé consiste à chercher d'abord la hauteur du second astre : cette hauteur étant découverte, on est dans le cas du Probleme II. J'ai dit que celui-ci peut être utile en certain cas, & cela est aisé à montrer maintenant. Car si (E') l'un des deux astres qui se présentent à un Observateur, est fort bas, il sera peu sûr d'observer sa hauteur, à cause de l'irrégularité de la réfraction que souffrent les rayons très-inclinés à l'horison : ainsi il vaudra mieux prendre seulement la hauteur de l'astre (E) le plus élevé des deux, & conclurre la hauteur de l'autre, de l'observation de l'angle de son azymuth, & de l'azymuth de l'astre plus élevé (je suppose que cette espece d'observation soit par elle-même aussi juste que celle de la hauteur) : car la hauteur conclue ne se ressentira du côté de la réfraction, que du même degré d'erreur que cette cause peut jetter sur la hauteur observée.

Voici la maniere de trouver la hauteur du second astre. Je suppose que la distance des deux astres est connue, & je nomme δ le cosinus de cette distance : cela posé, j'observe que l'on est dans le même cas pour découvrir la hauteur de l'astre E', que celui où l'on est pour découvrir la hauteur

hauteur du pole Ph, *Fig.* 40, lorſque la déclinaiſon d'un aſtre a (dont le complément eſt Pa), ſa hauteur am, & mZh ſon angle azymuthal ſont donnés : car nous avons de même, *Fig.* 41, EE' diſtance des deux aſtres ; EM hauteur de l'un d'eux ; MZM' angle des deux verticaux ; ZEM, $ZE'M'$ où ils ſont ſitués, & nous cherchons $E'M'$ (dont je nomme le ſinus h', & le coſinus k').

Je prends donc la deuxieme formule du premier Lemme dans l'état $rrx + nck = rsh$ (ou dans tel autre qui conviendra à la queſtion), & j'y ſubſtitue δ, coſinus de EE', au lieu de x, coſinus de aP ; h' & k', ſinus & coſinus de $E'M'$, au lieu de s & c, ſinus & coſinus de Ph ; γ, coſinus de l'angle MZM' au lieu de n, coſinus de l'angle mZh ; & j'y laiſſe h, k, qui ſont ſinus & coſinus de am, pour ſinus & coſinus de EM. J'ai donc $rr\delta - \gamma k'k = rh'h$; ou bien $rr\delta - rh'h = \gamma k'k$; & après avoir élevé chaque membre au quarré, & ſubſtitué $rr - h'h'$ à $k'k'$, je trouve l'équation

$$\left.\begin{matrix} rrhh \\ \gamma\gamma kk \end{matrix}\right\} h'h' - 2r^3\delta hh' = rr\gamma\gamma kk - r^4\delta\delta.$$

Prenant $A = rrhh + \gamma\gamma kk$, $B = rr\delta h$, $C = \gamma\gamma kk - rr\delta\delta$, on a,

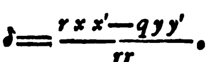
$$h' = \frac{rB}{A} \pm \frac{r}{A}\sqrt{(BB + AC)}$$

Et c'eſt la moindre de ces racines qui eſt valeur du ſinus de $E'M'$, dans la ſuppoſition que $E'M'$ eſt plus petite que EM.

J'ai ſuppoſé que la diſtance des deux aſtres étoit connue. Voici une maniere de la déduire de leurs déclinaiſons, & leur différence d'aſcenſion droite : nous ſommes en même ſituation pour découvrir cette diſtance, que celle où l'on eſt pour découvrir la déclinaiſon d'un aſtre a (de laquelle Pa eſt complément), *Fig.* 43, lorſque la

hauteur du pole Ph, la hauteur am de cet astre, & son angle azymuthal mZh sont donnés : car P étant le pole dans la *Fig.* 44, toute semblable à la 43, & ee' l'équateur, nous y avons pareillement EE' & Ee distances des astres à l'équateur, & ePe', angle des méridiens où ils sont situés, & nous cherchons EE', qui répond à aP dans la *Fig.* 43.

Je prends donc encore la deuxieme formule du premier Lemme $rrx = rsh - nck$, & j'y substitue encore δ, cosinus de EE', au lieu de x cosinus de aP; x & y, sinus & cosinus de Ee, au lieu de h & k, sinus & cosinus de am; x' & y', sinus & cosinus de $E'e'$, au lieu de s & c, sinus & cosinus de Ph; enfin, q cosinus de ePe', au lieu de n, cosinus de mZh, & j'ai $rr\delta = rxx' - qyy'$, ou bien,



$$\delta = \frac{rxx' - qyy'}{rr}.$$



REMARQUES POUR LE PROBLEME XIV. de l'Essai d'Horolepse Nautique, I. Partie.

IL y a un changement à faire à cet article : la solution que j'y ai donnée est défectueuse. Son défaut consiste en ce que deux quantités fractionnaires, qui semblent composées d'élémens différens, mais qui se réduisent en effet à une même expression, y sont employées pour faire évanoüir une des inconnues, en sorte que tout se détruit par cette opération, & il ne reste que zéro divisé par zéro, pour valeur de l'inconnue qui paroît conservée. Voici quel a été le mauvais emploi. Après avoir formé l'égalité $rrqas - raXcv = (rqX' - bqX + apX)\,ct$, d'où j'ai déduit $\frac{rqas - aXcv}{rqX' - bqX + apX} = \frac{ct}{r}$, j'ai voulu avoir une autre valeur de $\frac{ct}{r}$, & j'ai cru l'obtenir, en formant une égalité où les élémens $p'q'$ se trouvassent. J'ai donc fait $rrp'qas + rXcv\,(bq' - rq) = (rp'qX' - bpq'X - aqq'X)$ ct; mais cette deuxieme égalité n'est autre chose que la premiere multipliée par p' dans tous ses termes : car on a, par le second Lemme, $rq = bq' + ap'$, ou bien, $bq' - rq = - ap'$; donc le terme $+ rXcv\,(bq' - rq)$ du premier membre de la deuxieme égalité, se réduit à $- rp'aXcv$, & l'on voit déja que tout ce membre ne differe du premier de la premiere égalité, qu'en ce qu'il est multiplié par p'. Il en est de même du second, car on a encore, par le second Lemme, $rp = bp' - aq'$, & (multipliant tout par q) $rqp = bp'q - aqq'$; puis (en substituant à rq sa valeur $bq' + ap'$), $bpq' + app' = bp'q$

$-aqq'$, ou enfin, $-bpq'X-aqq'X=bpqX-appX$. Donc la partie $(-bpq'X-aqq'X)$ *ct* du second membre de la deuxieme égalité, se réduit à $(-bp'qX+ap'pX)$ *ct*, qui est la même chose que les termes $(-bqX+apX)$ *ct* de la premiere égalité multipliés par p', &c.

Ce vice foncier de ma solution, n'est pas le seul qui l'infecte, il en a entraîné un autre dans la forme, & celui-ci consiste en ce que l'inconnue *s* n'est que linéaire dans le résultat du calcul, au lieu qu'elle doit monter au second degré, comme on le verra dans la suite.

Dès le tems que je rédigeai ce mauvais calcul, j'en soupçonnai le défaut radical : mais je n'avois pas alors (à la fin d'Août) assez de tems pour le vérifier, & d'ailleurs je n'avois plus d'espérance d'en trouver un meilleur, lequel fût construit d'après les formules de l'Astronomie nautique. Ainsi je passai par-dessus mon scrupule, tant par l'espece de contrainte où j'étois, que parce que je me réservois, comme il est marqué dans la troisieme Scholie, de proposer une autre solution pour la pratique, & que je n'en voulois donner qui fût fondée sur ces Formules de M. de Maupertuis, que par forme de suite de la méthode employée jusques-là, & pour répondre au titre de ma premiere Partie.

Je n'espérois plus, dis-je, de parvenir à un meilleur calcul, fondé sur les formules de M. de Maup. cependant j'en ai construit un de cette qualité peu après, & je vais le rapporter. Voici la cause de ma méprise. Après une premiere tentative, qui n'étoit pas bonne, j'avois pris, vers le tems du commencement de mon travail, une autre voie dont je fus content, & qui est la même à laquelle je suis revenu ; mais ne faisant mes préparatifs que sur des feuilles volantes, je me bornai à poser les fondemens du bon calcul. Quand il fut question, quelques semaines après,

d'achever cet article, je ne m'en rappellai pas assez distinctement les idées : je m'imaginai, je ne sçai comment, que ces opérations dont j'avois été satisfait, conduisoient à une équation du quatrieme dégré : je voyois d'ailleurs très-clairement, que l'inconnue de cette équation ne pouvoit avoir que deux valeurs ; je regardai donc ce procedé comme trop compliqué, & ne méritant gueres plus que ma premiere tentative, d'être suivi. Je m'en défiai tant que je l'abandonnai, sans le mettre à une épreuve complette, comme je l'aurois dû ; mais en évitant cette voie, & me fatiguant beaucoup pour en ouvrir une autre, je ne pûs que m'égarer, & affoiblir mon discernement.

Substitution à faire au Probleme XIV. de l'Essai, &c.

[Je conserve les mêmes dénominations employées dans cet article]. On a, comme au Probleme VII, $su't - sut' = cX't - cXt'$, ou (à cause de $ra = u't - ut'$), $ras = cX't - cXt'$. Or, en supposant que l'astre ι est observé au-dessus du cercle de six heures, & à une plus grande distance du méridien que chacun des deux autres, on a $rt = q\iota - pv$, $rt' = q'\iota - p'v$. Substituant donc les valeurs de t & t' dans l'égalité précédente, elle se change en $rras = qX'c\iota - pX'cv - q'Xc\iota + p'Xcv$, ou bien $rras + cv\,(pX' - p'X) = c\iota\,(qX' - q'X)$: quarrant chaque membre, on a $r^4aass + 2rrascv\,(pX' - p'X) + ccvv\,(pX' - p'X)^2 = cc\iota\iota\,(qX' - q'X)^2$. Or, par le §. I. du premier Lemme, $cv = \frac{rrh'' - rsz}{i}$, donc $ccvv = \frac{rr}{ii}(rh'' - sz)^2$, & ($\iota\iota$ étant $= rr - vv$, ou bien, $cc\iota\iota = rrcc - ccvv = r^4 - rrss - ccvv$), $cc\iota\iota = \frac{rr}{ii}\,(rrii$

$-iiss+[rh-sz]^2$). Subſtituant donc les valeurs de cv, $ccvv$, & $cc^{\theta\theta}$ dans la derniere égalité, multipliant tout par ii, & diviſant par rr, on a d'abord:

$$\left.\begin{array}{l} rraaii \\ -2raiz(pX'-p'X) \\ +zz\left\{\begin{array}{l} ppX'X' \\ -2pp'XX' \\ +p'p'XX \end{array}\right. \\ +zz\left\{\begin{array}{l} qqX'X' \\ -2qq'XX' \\ +q'q'XX \end{array}\right. \\ +ii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} ss \quad \left.\begin{array}{l} +2rrah''i(pX'-p'X) \\ -2rh''z\left\{\begin{array}{l} ppX'X' \\ -2pp'XX' \\ +p'p'XX \end{array}\right. \\ -2rh''z\left\{\begin{array}{l} qqX'X' \\ -2qq'XX' \\ +q'q'XX \end{array}\right. \end{array}\right\} s \quad \left.\begin{array}{l} +rrh''h''\left\{\begin{array}{l} ppX'X' \\ -2pp'XX' \\ +p'p'XX \end{array}\right. \\ +rrh''h''\left\{\begin{array}{l} qqX'X' \\ -2qq'XX' \\ +q'q'XX \end{array}\right. \\ -rrii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} = 0,$$

Et comme $pp-qq=rr$, ainſi que $p'p'+q'q'$, & que d'ailleurs, par le ſecond Lemme, $pp'+qq'=rb$, cette équation ſe réduit à

$$\left.\begin{array}{l} rraaii \\ -2raiz(pX'-p'X) \\ +rzz(rXX-2bXX'+rX'X') \\ +ii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} ss \quad \left.\begin{array}{l} +2rrah''i(pX'-p'X) \\ -2rrh''z(rXX-2bXX'+rX'X') \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} +r^3h''h''(rXX-2bXX'+rX'X') \\ -rrii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} = 0,$$

SCHOLIE *pour le Probleme XVII. de la premiere Partie de l'Eſſai d'Horolepſe Nautique.*

LES deux opérations où je viens d'employer l'algebre, ſont de vraies réſolutions de triangles ſphériques obliquangles [nous avons en dernier lieu, les déclinaiſons & la différence d'aſcenſion droite de deux aſtres, c'eſt-à-dire, deux côtés d'un triangle ſphérique avec l'angle EPE', compris entre ces côtés, & nous cherchons la diſtance de ces aſtres, qui eſt le troiſieme côté

du triangle. Dans le cas précédent, nous avons la hauteur d'un aſtre E, ſa diſtance d'un autre aſtre E', & l'angle des azymuths de ces aſtres, c'eſt-à-dire, deux côtés d'un triangle ſphérique avec l'angle EZE', oppoſé à l'un de ces côtés, & nous cherchons la hauteur de l'aſtre E', qui eſt le complément du troiſiéme côté du triangle]; mais ces deux ſolutions ne ſont point ſemblables pour la commodité. La derniere eſt une équation linéaire, qui conduit à un calcul numérique aſſez facile; la précédente eſt une équation du ſecond dégré, qui, exigeant une extraction de racine, indique un calcul numérique pénible. Je ne peux diſſimuler que ce calcul eſt bien plus long & plus difficile que celui que preſcrit la regle de Trigonométrie Sphérique, qui convient au cas dont il s'agit; c'eſt pourquoi il ſeroit préférable dans la pratique, de faire uſage de cette regle commune.

La ſolution algébrique eſt, dis-je, moins avantageuſe que la regle commune pour le cas dont il s'agit, & il en eſt de même pour quelques autres cas, où l'on tomberoit auſſi en des équations du ſecond dégré. Le déſavantage de l'algebre pour ces cas, conſiſte en ce que ſaiſiſſant d'abord ſon objet d'un ſeul coup, elle parvient à une formule compliquée, qui indique pluſieurs opérations arithmétiques, dont quelques-unes ne peuvent être exécutées directement par logarithmes, au lieu que la Trigonométrie, dans les mêmes cas, diviſe l'objet propoſé en deux Parties, qu'elle fait chercher l'une après l'autre, enſorte qu'elle n'a beſoin pour chacune, que d'une regle de trois ſimple & pratiquable par logarithmes.

[Si c'eſt ſeulement par *art*, que les Auteurs de cette ſcience, qu'on répute *ſecondaire*, ont ainſi diviſé leurs ſolutions, j'avoüe bien volontiers que leur art eſt *admirable*, & je l'admire en ce qu'il a fait appercevoir des voies

particulieres, *indirectes*, si l'on veut, mais plus abrégées pourtant que celles que fournit l'algebre, par son procedé général & *immédiat*. Quoi qu'il en soit de l'*art* de ces Géometres, qui nous ont donné la Trigonométrie Spherique, il me paroît heureux qu'ils aient tourné leur vûe ainsi qu'ils ont fait pour certains cas. Au reste, je ne suis point fort surpris que l'algebre conduise en ces rencontres à des pratiques arithmétiques peu commodes; car cela doit arriver quelquefois, parce que cette science étant assujettie sous des loix rigoureuses en ce qu'elle a de propre, elle ne donne, par sa méchanique, que ce qui résulte nécessairement, de la maniere dont on a entamé la recherche. C'est le calcul algébrique que j'entends ici par algebre propre : elle est, à la vérité, un moyen merveilleux pour faire des découvertes, & peut, jusqu'à un certain point, suppléer l'office du génie : mais je ne la regarde pourtant que comme un instrument, & je la distingue de l'analyse qui y est souvent jointe. C'est l'analyse prise en général, qui est le premier & le principal des Arts, & qui constitue l'*esprit Géometrique*; Art de génie, qui a peu de regles, & qui est, pour ainsi dire, au-dessus des regles, parce qu'il en est l'inventeur, & qu'il sçait diversifier sa marche, ou même s'en faire une nouvelle dans le besoin; Art enfin, dont les effets immédiats peuvent exister ailleurs que dans l'algebre.]

Si l'on veut considérer de près, & conférer les résolutions que fournissent l'algebre & la Trigonométrie Sphérique pour ces cas, dont on a un exemple ci-dessus, dans la recherche de la hauteur de l'astre E' : en voici le caractere. Elles se ressemblent d'un côté, en ce que dans l'une & dans l'autre on a deux quantités, dont il faut prendre tantôt la somme, tantôt la différence : c'est pourquoi, soit qu'on suive l'une ou l'autre route, on est également obligé

obligé de pénétrer dans la nature de la question, ou du moins d'en connoître l'état : je veux dire qu'il faut également voir quelle est la forme du triangle qu'on veut résoudre. Ainsi l'application de l'une de ces méthodes n'est gueres moins sujette à *ambiguité* que l'application de l'autre ; & si c'est un avantage pour une opération, que d'obliger celui qui la fait d'*ouvrir les yeux* sur les circonstances de la question, les deux procedés dont il s'agit, sont doués assez également de cette espece d'avantage.

Ces procedés different d'ailleurs. Dans celui qu'enseigne la Trigonométrie ; les deux quantités dont il faut prendre la somme ou la différence, sont des angles ou des arcs ; & l'une de ces quantités ayant été trouvée par certaine droite correspondante, c'est-à-dire, par son sinus ou sa tangente, &c. sert ensuite à l'invention de la deuxieme quantité, mais c'est une autre correspondante de la premiere quantité qu'on emploie dans l'analogie qui donne la seconde. Si, par exemple, on a trouvé la premiere quantité par sa tangente, on se sert de son cosinus dans la deuxieme analogie, &c. C'est en cela que consiste le fin de cette résolution, & sa simplicité vient en partie de ce que l'on profite des divers calculs faits d'avance dans les Tables. Quant à la solution algébrique, elle donne directement le sinus de l'arc, ou de l'angle désiré ; c'est ce sinus qui est la somme ou la différence des deux termes compris dans la formule, & ces termes sont compliqués, parce que le cosinus étant enveloppé dans la préparation, il faut chasser une de ces inconnues, en y substituant sa valeur algébrique, en sorte qu'on est privé du bénéfice que la Trigonométrie commune trouve dans les Tables, &c.

Au reste, il y a plusieurs cas où les résolutions algébriques des triangles sphériques obliquangles n'étant que

des équations linéaires, indiquent des opérations arithmétiques à peu près égales en commodité, à celles que prescrit la Trigonométrie: & les regles de la premiere espece ont par-dessus celles de la deuxieme, le mérite d'être conçûes en moins de termes, d'être moins nombreuses (parce que la même formule comprend deux cas), & d'être plus faciles à découvrir, ou bien à rappeller à l'esprit de leur origine. Il est peut-être à propos de spécifier ici tous les cas possibles, afin d'assigner ceux où l'algebre prévaut, & ceux où elle me paroît moins utile. Ce que je vais dire auroit pû être mis à la tête de cet Essai, je l'y placerois s'il avoit à paroître au jour, & je refondrois en même tems le premier Lemme.

Il y a douze cas à résoudre dans les triangles sphériques obliquangles. Or, ces cas peuvent être rangés en quatre classes, & être réglés par trois ou quatre formules.

La premiere classe comprend trois cas, qui sont ceux où les quatre élémens du triangle qui sont la matiere de l'opération, sont les trois côtés & un des angles : car cet angle étant opposé à un des côtés, 1° ou cet angle, 2° ou ce côté seront cherchés ; 3° ou bien ce sera un des côtés qui comprennent cet angle.

La deuxieme classe est réciproque de la précédente: elle réünit les cas où les quatre élémens employés dans l'opération sont les trois angles, & un des côtés du triangle. Car ce côté étant opposé à un des angles, 4° ou on cherchera ce côté, 5° ou bien cet angle, 6° ou l'un des angles adjacents à ce côté.

La troisieme & la quatrieme classe comprennent les cas où les quatre élémens sphériques qui sont la matiere de l'opération sont deux côtés, & deux des angles du triangle. Je place dans la troisieme classe, les cas où chacun des angles employés est opposé à l'un des deux côtés

aussi employés. Or, y ayant même relation des côtés aux angles dans cette hypothese, il ne s'y trouve que deux cas, 7° ou c'est un des angles, 8° ou bien un des côtés qui est désiré.

La quatrieme & derniere classe embrasse quatre cas, dans lesquels il y a seulement un angle & un côté opposé employés, l'autre angle & l'autre côté employés n'étant pas opposés, mais adjacents. Car 9° ou c'est l'angle de la premiere condition, 10° ou le côté opposé que l'on cherche, 11° ou bien c'est l'angle de la deuxieme condition, 12° ou bien enfin, c'est le côté qui y est adjacent.

Les deux cas de la troisieme classe sont les plus simples de tous; une seule analogie suffit pour les résoudre : aussi la regle algébrique de leur solution n'est-elle pas différente de celle que fournit la Trigonométrie. On a un exemple de cette regle, dans la formule cottée 5ᵉ au premier Lemme.

Les 1, 2, 4, 5, 9 & 10ᵉ cas, approchent en simplicité, de ceux dont on vient de parler : dans les formules que fournit l'algebre pour leur résolution, l'inconnue est seulement linéaire, mais sa valeur est nécessairement composée de deux termes. Tous ces cas conviennent, en ce que l'un des élémens donnés est opposé à l'élément cherché, & que les deux autres élémens employés dans l'opération, ne sont pas de la même condition respective. C'est par cette deuxieme circonstance, que les six cas mentionnés different des deux de la troisieme classe, & sont moins simples.

Enfin, les 3, 6, 11 & 12ᵉ cas, sont compliqués, & l'algebre ne peut les résoudre directement, que par une équation du second dégré. Tous ces cas ont cela de commun entre eux, & de différent d'avec les huit autres, que

l'élément opposé à celui qui est cherché, n'est point compris entre les trois qui sont donnés. Ainsi ces quatre cas sont faciles à discerner.

Voyons maintenant les formules algébriques qui répondent à nos classes. Nous avons deux exemples de l'hypothese qui constitue la premiere de ces classes, dans les deux premiers §§ du premier Lemme ci-dessus [il est visible par les titres de ces §§, que les trois côtés, ou les complémens de ces côtés, & un des angles du triangle *PEZ*, sont les quatre élémens dont la relation y est demandée]. Ainsi nous avons deux exemples de la regle algébrique, qui convient aux cas de la premiere classe; dans la premiere & la deuxieme formule de ce Lemme. Ces deux formules $rrh \pm cyu = rsx$; $rrx \pm cnk = rsh$; n'étant donc que des applications de la même regle, il eût suffi d'en démontrer une, d'autant plus que je n'avois pas grand usage à faire de la deuxieme dans cet Essai.

J'ai insinué qu'une seule regle algébrique s'étendoit aux trois cas de la premiere classe, nonobstant leur différence : mais aussi c'est d'une maniere différente qu'elle y sert. En effet, pour trouver h, ou u, qui sont les cosinus du côté *EZ*, & de l'angle opposé *EPZ*, la formule $rrh \pm cyu = rsx$ est parfaite : mais elle n'est que préparatoire pour obtenir l'un ou l'autre côté, *EP*, ou *PZ*, du même triangle *EPZ*, parce qu'il y reste dans ce cas, une inconnue à chasser, &c.

Quant à l'invention, ou démonstration de la regle dont il s'agit, j'observe qu'on y peut parvenir en plusieurs manieres, dont deux également simples & aisées à retenir, le sont plus que toute autre, à raison de l'ordre qu'on y garde. M. de Maupertuis, que j'ai copié ci-dessus au Lemme premier, a pris l'un de ces procedés simples dans l'exemple du §. II : mais il n'a employé ni l'un ni l'autre

dans l'exemple du §. I, où l'on a la formule $rrh \pm cyu = rsx$, ou bien, $rrh - rsx = \pm cyu$ à établir. Le procedé qu'il y a suivi, a été de chercher les valeurs des deux quantités BO, OF, dont la somme ou bien la différence est BF, c'est-à-dire, $\frac{yu}{r}$, &c. On réussiroit encore également, en cherchant les deux quantités dont la somme ou la difference est $\frac{cu}{r}$, & en faisant voir, à l'aide d'une figure convenable, que les valeurs de ces quantités sont $\pm \frac{ys}{x}$, & $\frac{r}{y}\left(h \mp \frac{rs}{x}\right)$. Mais voici le genre de proceder que je préfere : c'est de prendre les valeurs des deux quantités, dont la somme ou bien la différence est égale au cosinus de l'un ou de l'autre des côtés PE, PZ, qui comprennent l'angle employé dans l'opération. En disposant, par exemple, l'égalité qu'il s'agit d'établir par rapport au cosinus x du côté PE, nous avons à montrer que $\frac{rrh - cyu}{rs} = x$, *Fig.* 1 & 2e, ou que $\frac{rrh + cyu}{rs} = x$, *Fig.* 3e; c'est-à-dire, que $\frac{rh}{s} \mp \frac{cyu}{rs} = x$; & cela est aisé, car (en suppléant la lettre R dans lesdites figures, pour marquer le point d'intersection des droites CBP, LFG) il est visible que CB ou $x = CR \mp RB$. Or (à cause de la similitude des triangles rectangles PQC, CGR) on a, $PQ\,(s) : CP\,(r) :: CG\,(h) : CR = \frac{rh}{s}$; & les triangles semblables PQC, FBR, donnent $s : c :: BF\left(\frac{yu}{r}\right) : RB = \frac{cyu}{rs}$. Donc, &c.

Que si on veut disposer l'égalité en question par rapport au cosinus s de l'autre côté PZ du même triangle, on aura la même facilité à l'établir, c'est-à-dire, à prouver que

$\frac{rrh \mp cyu}{rx} = s$, ou bien que $\frac{rh}{x} \mp \frac{cyu}{rx} = s$, en se servant d'une figure convenable, telle qu'est la 45e, où $OAIx\omicron C\phi$, représente le grand cercle, qui a P pour pole, & $\Delta Z \delta \nu \phi$, un parallele à ce cercle : ainsi $\Delta \nu$ est le sinus (c) de PZ, & $C\nu$ son cosinus (s) ; $A\phi$ (qui a $Z\phi$ pour parallele) est le sinus de l'angle EPZ, & $C\phi$ son cosinus (u) ; on a donc, $CO\,(r) : C\phi\,(u) :: \beta\Delta\,(c) : \beta\phi = \frac{cu}{r}$. $VIK\chi C$ est le grand cercle qui a E pour pole, & $\zeta Z\beta\rho\gamma\phi$ est un parallele à ce cercle, ainsi $\zeta\gamma$ ou $Z\gamma$ est le sinus de ZE, & $C\gamma$ en est le cosinus (h) ; enfin $C\chi$ est le sinus (y) de PE, & $P\chi$ est son cosinus (x).

Cela posé, il est visible que $C\nu$ ou $s = C\rho - \rho\nu$. Or, (à cause de la similitude des triangles rectangles $P\chi C$, $C\gamma\rho$) on a $P\chi\,(x) : CP\,(r) :: C\gamma\,(h) : C\rho = \frac{rh}{x}$; d'un autre côté, les triangles semblables $P\chi C$, $\phi\nu\rho$, donnent: $P\chi\,(x) : C\chi\,(y) :: \beta\phi\left(\frac{cu}{r}\right) : \rho\nu = \frac{cyu}{rx}$. Donc $C\nu\,(s) = C\rho - \rho\nu = \frac{rh}{x} - \frac{cyu}{rx}$; ce qu'il falloit prouver.

A l'égard des cas de la deuxieme classe, quoique nous n'en ayons rencontré aucun dans cet Essai, nous pouvons dire en passant, & prouver, qu'ils sont soumis à une regle algébrique, pareille à celle qui vient d'être établie ; parce que tout triangle sphérique correspond à quelque autre de telle façon, que les côtés de celui-ci ont respectivement les mêmes sinus que les angles de celui-là, & que les côtés de celui-là ont aussi les mêmes sinus respectivement que les angles de celui-ci. Les trois côtés, & un des angles de l'un, ont donc entre eux la même espece de relation que les trois angles, & un des côtés de l'autre. Dans la *Fig.* 46, qui est conforme à la *Fig.* 1, quant aux

lignes marquées des mêmes lettres, *AOXIay* étant le grand cercle dont *P* est le pole, &c. soit *KIV* un autre grand cercle, dont *E* soit le pole (d'où il suit que *K* est pole du cercle *ZEMVz*, & *I* pole du cercle *PEOp*), nous aurons les triangles *KIX*, & *PZE*, pour correspondans, de la maniere qui a été dite. Car 1°, les angles *PIa* & *EIK*, étant droits par l'hypothese, & renfermant chacun l'angle *PIK*, l'angle *EIP* est égal à *KIa*, complément à deux droits de l'angle *KIX*; *EIP* est donc aussi complément à deux droits de *KIX*, & ces deux angles ont mêmes sinus & cosinus; donc *KIX* a même sinus y & cosinus x, que l'arc *PE*, qui est la mesure de l'angle *EIP*. 2°. L'arc *EMV*, étant par l'hypothese un quart de circonférence, de même que *ZEM*, l'angle *IKX* mesuré par *MV*, a même sinus k, & cosinus h, que l'arc *ZE*. 3°. L'angle *IXK* complément de *KXP*, & égal par conséquent à l'angle *PXZ*, a même sinus c, & cosinus s, que l'arc *PZ* mesure de l'angle *PXZ*. 4°. Enfin, *IXO* étant un quart de circonférence, de même que *AOX*, l'arc *IX* est égal à *AO*, qui est la mesure de l'angle *EPZ*, & a par conséquent même sinus t, & cosinus u que cet angle. Donc les trois angles, & le côté *IX* du triangle *KIX*, ont la même relation entre eux que les trois côtés, & l'angle *P* du triangle *EPZ*; & cette relation est exprimée par la formule $rrh - cyu = rsx$.

La formule $rrx + cnk = rsh$, qui est de la même espece, marque pareillement la relation des trois angles, & du côté *KX* du triangle *KIX*, parce que l'arc *KXM* étant un quart de circonférence, ainsi que *XMH*, l'arc *KX* est égal à *MH*, qui est la mesure de l'angle *MZH*, complément à deux droits de l'angle *PZE*, & par conséquent *KX* a même sinus m, & cosinus n, que l'angle *PZE*, &c. On feroit voir encore, s'il étoit nécessaire, que le côté

KI du triangle *KIX* a mêmes ſinus & coſinus que l'angle *PEZ*.

On peut remarquer ici que l'élément ſphérique cherché dans les quatre cas les plus ſimples de la premiere & de la deuxieme claſſe, eſt exprimé par ſon coſinus: mais dans les deux cas de la troiſieme claſſe, l'élément déſiré eſt exprimé par ſon ſinus, & c'eſt enfin par ſa cotangente qu'il l'eſt, dans les deux cas ſimples de la claſſe dont il nous reſte à parler. J'ajoûte que dans les quatre premiers cas, la Trigonométrie emploie pour l'élément cherché, la même expreſſion que l'algebre; c'eſt pourquoi l'on peut, dans ces cas, paſſer de la regle trigonométrique à la regle algébrique, à l'aide du ſecond Lemme.

Nous avons deux exemples de l'hypotheſe qui conſtitue la quatrieme claſſe, dans le III & IVe §. du premier Lemme. Leurs titres ſont aſſez voir, que les quatre élémens ſphériques, dont la relation y eſt demandée, ſont deux côtés, & deux angles du triangle *PEZ*, tels qu'un ſeul de ces côtés eſt oppoſé à l'un de ces angles. *Ainſi* nous avons deux exemples de la regle algébrique, propre aux cas de la quatrieme claſſe, dans la troiſieme & la quatrieme formule de ce Lemme, qui ſont $rnyt \pm rmcx = msyu$, & $rcht \pm nkst = rmku$, ou bien (en les réduiſant, comme il convient, à une forme plus ſimple) $Nt \pm cX = su$, & $Hc \pm mT = ns$.

Quant à l'invention de la regle dont il s'agit, où au rappel de ſon fondement à la mémoire, on peut y parvenir en pluſieurs manieres, les unes plus ſimples que les autres. M. de Maupertuis a procédé aſſez ſimplement dans l'exemple du §. III, où je l'ai copié, ainſi que dans les autres; mais cet habile homme a procédé différemment & avec circuit, dans l'exemple du §. IV. Il eût pû s'y conduire

conduire de la même maniere que dans l'exemple précédent, en raisonnant comme il suit. Les triangles semblables, efC, EFB, donnent $t:u::EF\left(\frac{mk}{r}\right):FB=\frac{mku}{tr}$. Les autres triangles semblables PQC, FBR, (je suppose encore ici que le point d'intersection des droites PBC, LFG, est marqué R) donnent; $s:r::FB\left(\frac{mku}{tr}\right):FR=\frac{mku}{st}$. D'ailleurs les triangles semblables PQC, CGR, donnent; $s:c::CG\,(h):RG=\frac{ch}{s}$. Or, $FR-RG=FG\left(\frac{nk}{r}\right)$ *Fig.* 1 & 4; ou bien $FR+RG=FG$, *Fig.* 3, &c. Donc $\frac{mku}{st}\mp\frac{ch}{s}=\frac{nk}{r}$, ou enfin, $rmku\mp rcht=nkst$. Il y a encore une autre maniere toute pareille à celle qu'on vient de voir, pour établir la même formule, sçavoir, en montrant que $\frac{mu}{n}\pm\frac{h}{k}\times\frac{r}{n}\times\frac{ct}{r}=\frac{st}{r}$. Il y a aussi une deuxieme maniere de prouver la troisieme formule, laquelle est semblable à celle qu'a employée M. de Maupertuis. Elle consiste à montrer que $\frac{nt}{u}\pm\frac{x}{y}\times\frac{r}{u}\times\frac{mc}{r}=\frac{ms}{r}$.

Quoique la double maniere de raisonner que je viens de toucher, soit fort bonne, il est cependant une autre méthode, que je préférerois volontiers à celle-là, comme étant plus directe pour établir la regle en question. Cette regle est dans l'exemple du §. III, $rnyt\pm rmcx=msyu$, ou bien $Nt\pm cX=su$; & pour arriver à cette deuxieme forme de la regle, il faut, lorsqu'on a procedé comme ci-dessus, montrer encore, que $\frac{rn}{m}=N$, & que $\frac{rx}{y}=X$. Mais on peut éviter cette espece de détour, & prouver directement que $Nt\pm cX=su$, ainsi

qu'on va voir. Il y a deux manieres également propres pour cela, car il s'agit de montrer, ou que $\frac{Nt \pm cX}{s} = u$, ou bien que $\frac{Nt \pm cX}{u} = s$.

1°. Dans la *Fig.* 1, qui est conforme à la *Fig.* 47. quant aux lignes marquées des mêmes lettres, X y désignant le pole du grand cercle $PZAHpzah$, & Z celui de $HMXh$, &c. Soit $A\zeta$ le sinus (c) de l'arc AH égal à PZ, & $C\zeta$ son cosinus s; Of le sinus (t) de l'arc AO ou de l'angle EPZ, & $Og = Cf$ son cosinus (u); Oe la tangente X du complément OE de l'arc PE; $X\mu$ la tangente de l'arc XM, qui est l'excès de l'arc hXM, par lequel est mesuré l'angle PZE, sur un quart de circonférence; c'est-à-dire, soit $X\mu$ la cotangente N de l'angle PZE; soit gq une parallele à $X\mu$, & à $C\zeta H$, terminée par la secante $CM\mu$; il suit de ces hypotheses, que le rayon CgX, & la droite fO, sont perpendiculaires au plan Ogq; ainsi la tangente Oe étant perpendiculaire aux lignes gO, Of, se trouve dans le plan Ogq, & la droite eq rencontre la droite gO en quelqu'un de ses points, que je marque par d: d'ailleurs cette droite edq étant & dans le plan $MCEe$ de deux rayons du cercle $ZEMz$, qui est perpendiculaire à $CXMH$, & dans le plan Ogq qui est aussi perpendiculaire à ce plan $CXMH$, est pareillement perpendiculaire à ce plan, & par conséquent à la droite gq qui y appartient. Donc enfin les trois triangles $A\zeta C$, dqg, dOe, sont rectangles & semblables. Cela posé, les triangles semblables $CX\mu$, Cgq, donnent $CX (r) : X\mu (N) :: Cg = fO (t) : gq = \frac{Nt}{r}$; les triangles $A\zeta C$, dqg, donnent $C\zeta (s) : CA (r) :: gq \left(\frac{Nt}{r}\right) : gd = \frac{Nt}{s}$; enfin les triangles $A\zeta C$, dOe, donnent $C\zeta (s) : A\zeta (c) :: eO (X) : dO = \frac{cX}{s}$. Or, $gd + dO = gO (u)$,

donc $\frac{Nt}{s} + \frac{cX}{s} = u$. Ce qu'il falloit prouver.

2°. Que si on veut montrer que $\frac{Nt}{u} + \frac{cX}{u} = s$, on le pourroit, au moyen de la *Fig.* 47, en y ajoûtant quelques lignes, sçavoir, en joignant les points O, q, & divisant $C\zeta$ par une parallele à Oq, tirée du point A, &c. Mais il vaut mieux employer la *Fig.* 48. Les mêmes lettres y désignent les mêmes arcs que ci-devant. Soit d'ailleurs, $a\sigma$ le sinus (t) de l'angle sphérique $EPZ = OCA = aC\sigma$, & $C\sigma$ son cosinus u; soit $C\gamma = h\varphi$ le sinus (c) de l'arc $PZ = ha$, & $h\gamma$ son cosinus s; soit hk la tangente de l'angle hZK, qui est la différence de l'angle PZE d'avec un droit; c'est-à-dire, soit hk la cotangente (N) de l'angle PZE; soit PT le complément de l'arc EP, $P\theta$ la tangente X de PT; $\gamma\chi$ une parallele à $P\theta$ & à $OC\sigma$; $k\chi$ une droite située dans le plan du cercle IKT, qui est perpendiculaire au cercle $COEPT$; δ l'intersection des droites $k\chi$, $h\gamma$. Les trois triangles $a\sigma C$, $\delta\chi\gamma$, δhk, sont rectangles & semblables.

Cela posé, on voit que les triangles semblables $CP\theta$, $C\gamma\chi$, donnent $CP\,(r) : P\theta\,(X) :: C\gamma\,(c) : \gamma\chi = \frac{cX}{r}$. Les triangles $a\sigma C$, $\delta\chi\gamma$, donnent $C\sigma\,(u) : Ca\,(r) :: \gamma\chi\left(\frac{cX}{r}\right)$ $\gamma\delta = \frac{cX}{u}$: Enfin les triangles $a\sigma C$, δhk, donnent $C\sigma\,(u) : a\sigma\,(t) :: hk\,(N) : \delta h\ \frac{Nt}{u}$. Or, $\gamma\delta + \delta h = h\gamma\,(s)$, donc $\frac{Nt}{u} + \frac{cX}{u} = s$.

A l'égard des signes qui conviennent aux divers termes de nos regles algébriques de résolution des triangles sphériques obliquangles, voici un échantillon des observations qu'on pourroit faire pour y mettre ordre. Soit prise pour exemple, la regle des cas de la premiere

classe, laquelle est susceptible de ces trois états :

$$+ rrh - cyu = rsx ,$$
$$- rrh + cyu = rsx ,$$
$$+ rrh + cyu = rsx .$$

Il faut remarquer d'abord, que chacun de ces états ne répond pas seulement au triangle *EPZ*, mais encore à trois autres triangles *pEZ*, *pEz*, *PEz*, adjacents à celui-là, chacun desquels a un angle & un côté communs avec *PEZ*, & dont les autres angles & côtés, sont complémens à deux droits des autres élémens de *PEZ*. Il y a donc plusieurs cas particuliers à considérer, cas que je distribue de cette sorte.

Les deux côtés qui comprennent l'angle employé dans la regle, angle qui y est employé par son cosinus *u*, sont ou de même affection (c'est-à-dire, tous deux moindres, ou tous deux plus grands qu'un quart de circonférence) ou ils sont d'affection différente.

Ces côtés étant de même affection, ou l'angle compris entre eux est aussi de même affection que le côté qui y est opposé, ou il n'en est pas. Dans le premier cas, si l'angle est aigu, on a $rrh - cyu = rsx$, premier état de la formule. Voyez les triangles *EPZ*, *EpZ*, *Fig.* 1[e] & 2[e]. Mais si l'angle est obtus, on a $- rrh + cyu = rsx$, deuxieme état de la formule, voyez les triangles *EPZ*, *Epz*, *Fig.* 4[e]. Et si l'angle employé est d'autre affection que le côté opposé (auquel cas il doit être obtus), on a $rrh + cyu = rsx$, troisieme état de la formule. Voyez les triangles *EPZ*, *EpZ*, *Fig.* 3[e].

Les côtés qui comprennent l'angle employé, étant de diverse affection, cet angle ou est aussi d'une autre affection que le côté opposé, ou de la même. Dans le premier cas, l'angle doit être aigu, & le dernier état de la for-

mule a lieu. Voyez les triangles EPz, Epz, *Fig.* 3e. Dans l'autre cas, si l'angle est obtus, c'est le premier état de la formule qui a lieu. Voyez les triangles EPz, Epz; *Fig.* 1e & 2e; mais si l'angle est aigu, on a le second état de la formule. Voyez les triangles EPZ, EpZ, *Fig.* 4e.

Il est aisé de distribuer les cas régis par les autres formules, dans un ordre semblable.

J'observe pour conclusion, que si les triangles sphériques sont rectangles, ou ont un quart de circonférence pour un de leurs côtés, il s'évanoüit un des termes dans les formules qui en ont trois, & l'on trouve les mêmes regles que celles que prescrit la Trigonométrie pour ces sortes de triangles; ainsi l'algebre a encore en ce point un avantage sur cette autre science, les regles des triangles rectangles n'étant dans le procedé algébrique, qu'une espece de Corollaire des regles des obliquangles, au lieu que dans la Trigonométrie, il faut établir la résolution des triangles obliquangles, sur les regles particulieres des triangles rectangles.



SECONDE PARTIE.

Opérations subsidiaires aux calculs, pour trouver l'heure. Moyens de simplifier quelques solutions algébriques de ce Probleme.

LES solutions algébriques ne requierent souvent pour elles-mêmes que des opérations faciles, qu'une marche commune & peu subtile, qu'un petit jeu ou remuement de lettres & de signes ; & outre l'avantage qu'elles ont pour l'ordinaire, de ne dépendre que d'un petit nombre de principes simples & féconds (principes dont l'invention fait le fort du mérite d'un Géometre algébriste), elles ont toûjours celui de la précision. Mais aussi elles peuvent laisser à leur suite, la nécessité d'un calcul numérique long & pénible, & la plûpart de celles que j'ai rapportées ou données ci-dessus, sont de cette qualité. Outre beaucoup de multiplications & de divisions, elles indiquent des extractions de racines, qui ne peuvent être exécutées directement à l'aide des logarithmes. J'ai donc pensé qu'il convenoit de proposer d'autres solutions plus expéditives. On suppose qu'il est important pour un Navigateur de sçavoir l'heure, mais s'il n'opere que d'après l'algebre, un tems considérable s'écoulera pendant qu'il fera son calcul ; son vaisseau pourra être déplacé notablement en longitude, & il sera dans un nouveau besoin de chercher l'heure. C'est un cas approchant de celui du Barbier de Martial :

Eutrapelus tonsor dum circuit ora Luperci,
Expungitque genas, altera barba subit.

Parlons sérieusement. Je ne prétends pas que les opérations expéditives que j'ai à proposer, soient absolument meilleures que les solutions algébriques, & leur soient préférables : elles sont moins précises, il faut l'avouer, & je ne les donne que par forme d'accessoire, qui n'est pas sans quelque avantage. Le bon est partagé, est dispersé, & il y a presque toûjours dans les opérations humaines, de *fatales compensations*. Par exemple, si l'office du Géometre dans un Probleme est facile, l'office correspondant de l'Observateur est difficile, & demande une grande adresse, ou bien est peu sûre. Si au contraire, le Géometre veut faire usage d'une observation simple & exacte, son office devient, ou paroît devenir d'autant plus difficile : & quant aux pratiques du Géometre, telle qui est fort juste, est d'ailleurs fort pénible, & telle qui est plus facile qu'une autre, est d'ailleurs moins exacte. Ainsi j'estime qu'il est à propos de rassembler diverses méthodes, afin de prendre ce que chacune a de bon, s'il est possible.

Voici les raisons pour lesquelles je trouve quelque avantage dans les opérations qui sont plus expéditives que les calculs indiqués par l'algebre.

1°. Quoique ces opérations ne soient pas absolument exactes par elles-mêmes, elles seront peut-être quelquefois suffisantes pour les besoins nautiques. Elles le seront en effet, lorsqu'il ne sera pas nécessaire de déterminer l'heure avec la plus grande précision ; car elles ne sont pas sujettes à un défaut bien notable, si on les fait avec des instrumens d'une bonne grandeur. Cette maniere n'est pas même fort inférieure à la voie du calcul à cet égard : car les observations étant sujettes à quelque erreur, leur résultat trouvé par le calcul, doit être pareillement sujet à quelque erreur plus ou moins grande. Or, l'erreur inévitable qui découle de l'observation, ne sera pas

beaucoup augmentée par l'erreur particuliere qui peut se glisser dans les opérations dont il s'agit. On verra dans la suite, que l'une & l'autre erreur est à peu près de la même espece, & a une influence à peu près semblable pour chaque Probleme : ainsi quand elles seroient du même dégré, & conspirantes, le défaut de justesse du résultat de ces opérations, ne seroit que double de celui du résultat du calcul : mais j'estime que l'erreur particuliere de ces opérations sera moindre en dégré que l'erreur de l'observation ; celle-là n'ira peut-être pas au tiers, ni même au quart de celle-ci. Cela supposé, le défaut provenant de l'observation, ne sera augmenté que d'un tiers, ou d'un quart en sus, par le concours de celui qui peut se glisser dans les opérations que j'ai en vûe.

2°. La facilité de ces opérations invitera probablement le Navigateur à multiplier les observations propres à déterminer l'heure. Or, en prenant un milieu entre plusieurs déterminations, il n'approchera gueres moins du vrai, & peut-être en approchera-t-il plus que s'il se bornoit à une seule détermination, exécutée par la voie du calcul.

3°. On trouvera dans la troisieme Partie, des regles générales pour discerner les cas d'observation qui sont avantageux, ou désavantageux, pour la détermination de l'heure, c'est-à-dire, les cas dont l'erreur n'en produit qu'une petite, ou au contraire en produit une fort grande dans la détermination de l'heure. Mais s'il arrivoit qu'un Navigateur, faute d'avoir compris ces regles, ou de les bien posséder, ou par inadvertance, voulût employer une observation peu avantageuse, il en reconnoîtroit aisément la qualité, par ces opérations que je veux proposer : elles répondent si bien aux observations, que quand elles sont peu précises dans leur résultat, c'est une marque

marque sûre que l'observation particuliere sur laquelle on travaille, n'est pas avantageuse pour la détermination désirée, quand même on la tenteroit par la voie du calcul.

4°. Il se trouvera toûjours sans doute, sur les grands vaisseaux, quelque personne capable d'exécuter les calculs propres pour la détermination de l'heure, & qui en ait le loisir; mais peut-on compter qu'il s'en trouve sur tous les petits vaisseaux? S'il n'y en a pas, les opérations subsidiaires aux calculs semblent requises. Et à l'égard des grands vaisseaux, rien n'empêche que deux personnes n'y emploient des pratiques différentes, pour chercher l'heure sur la même observation. Ne doit-on pas être curieux de voir promptement l'à-peu-près de ce que l'on cherche?

5°. Quelque versé qu'on soit dans l'arithmétique, on peut commettre une faute de calcul. D'ailleurs, quand on opere d'après une formule algébrique, on peut encore prendre un signe pour un autre; additionner, par exemple, en conséquence, au lieu de soustraire. Il y a donc lieu de suspecter le résultat d'un calcul qui ne seroit fait qu'une seule fois, Or, l'opération subsidiaire est très-propre pour le confirmer, s'il est bon, ou pour en décéler le vice, s'il en a un.

6°. Dans les Problemes où l'algebre fournit pour la détermination désirée, une équation du sécond dégré, dont l'une & l'autre racine est positive, il faut beaucoup d'attention pour faire un juste choix entre elles, & l'on a sujet de craindre l'équivoque. Les opérations que je vais proposer, soulageront beaucoup l'imagination dans ces cas, & faciliteront le choix nécessaire.

7°. Enfin, c'est l'observation des astres dont la déclinaison est variable, qui est la plus commode, & de l'usage le plus étendu, pour trouver l'heure. Or, pour la faire

ſervir à cette découverte, il faut avoir par préalable, la déclinaiſon pour le moment de l'obſervation, au moins à peu près; & pour la connoître, cette déclinaiſon, par le moyen des Tables, il faut ou avoir obſervé tout le tems écoulé depuis qu'on a quitté certain point du globe dont on connoît la longitude, ou, ſi l'on y a manqué, il faut ſçavoir à peu près l'heure du lieu où l'on a fait l'obſervation, ainſi que ſa longitude; en ſorte qu'on peut ſe rencontrer à cet égard, dans le cas d'une eſpece de cercle (ce qui n'eſt pas ſans exemple dans les Problemes Nautiques), je veux dire qu'il peut être néceſſaire de connoître déja l'heure à peu près, pour la déterminer plus exactement, par l'obſervation des aſtres qui varient en déclinaiſon. Or, pour parvenir dans ce cas à une certaine exactitude, il faut corriger la détermination par le moyen du calcul différentiel; ou, ſi on l'ignore, il faut réitérer cette opération, je veux dire qu'il faut opérer une premiere fois ſur une déclinaiſon ſuppoſée, pour obtenir une déclinaiſon plus correcte, puis une deuxieme fois ſur cette déclinaiſon corrigée, pour obtenir la détermination requiſe. (Si l'on vouloit faire uſage de la Lune, il faudroit peut-être réitérer l'opération juſqu'à trois fois). Il en eſt de même pour la longitude des planetes; on peut être dans le beſoin de la corriger après l'avoir ſuppoſée, &c. Mais un Navigateur auroit-il le courage de faire deux *fois* de ſuite de longs calculs numériques; (ou bien de recourir au calcul différentiel, pour en tirer une double formule de correction relative à la double erreur ſur le lieu de la planete, &c.)? D'ailleurs, quelle néceſſité y a-t-il qu'une premiere détermination faite ſeulement pour obtenir le lieu d'un aſtre plus correctement qu'on ne l'avoit par eſtime, ait autant d'exactitude qu'il en peut réſulter du calcul? Il eſt plus avantageux, ce ſemble, que cette

opération préalable puisse s'exécuter avec facilité & promptitude, car on la doublera si l'on veut. Les pratiques expéditives que je vais exposer, sont donc convenables, au moins pour le cas dont il s'agit.

Je ne vois au reste qu'un inconvénient dans la proposition de ces pratiques, c'est que quelque Navigateur pourra s'en contenter, & négliger la voie du calcul, quoiqu'il soit en état de l'employer; mais d'un autre côté, si l'on cachoit ces pratiques, n'y auroit-t-il point quelque Navigateur, qui, dégouté par la peine du calcul, négligeât de chercher l'heure aussi fréquemment qu'il le fera? &c.

Cette voie subsidiaire au calcul, dont il m'a paru à propos d'annoncer d'avance les petits avantages, de peur qu'on n'en fît trop peu de cas, est de tracer les cercles de la sphere qui répondent aux observations, & qui déterminent les arcs ou les angles cherchés.

On peut exécuter cette description de plus d'une maniere. On peut la faire, par exemple, sur la sphere même. C'est la maniere qui se présente d'abord à l'esprit, & qui est la plus simple; & il ne faudroit pas beaucoup d'art à un Navigateur, pour découvrir de lui-même le procédé particulier qui seroit requis dans chaque conjoncture. Cependant cette maniere n'est pas la meilleure; l'opération seroit peu précise sur un petit globe; un grand globe seroit trop difficile à manier, à cause de sa pesanteur, ou, s'il étoit de matiere très legere, il seroit sujet à irrégularité. D'ailleurs pour connoître la valeur de certains angles sur un globe nud, il faudroit y tracer trop de lignes, &c. Il y auroit d'autres inconvéniens pour la solution de nos Problemes, si on prétendoit se servir d'un globe mobile sur son aissieu planté, comme il est ordinaire dans un méridien, supporté par un horison.

C'eſt ſur un plan où la ſphere céleſte ſoit projettée, que je conſeille de travailler. On peut faire une partie de ce planiſphere de métal, & y donner un grand diametre, ſans qu'il en réſulte d'incommodité. L'eſpece de projection que je choiſis, eſt celle que quelques Auteurs nomment *Stéreographique*, & qui eſt en uſage dans les Aſtrolabes. Dans cette projection, les droites qui paſſent par les divers points du globe, & les projettent ſur le planiſphere, partent de l'extrémité de l'axe du globe, lequel eſt perpendiculaire à ce plan. On ſçait, & il eſt aſſez viſible, que dans cette hypotheſe tous les cercles grands ou petits, qui paſſent par ce point commun à toutes les lignes de projection, ſont repréſentés ſur le plan par des lignes droites indéfinies. Ainſi le cercle horaire *poTβPEOζ*, *Fig.* 17, eſt repréſenté en partie ſur le plan de l'équateur, par la droite *oTbPEOB*. On ſçait encore que les autres cercles, grands ou petits, c'eſt-à-dire, tous ceux hors du plan deſquels eſt le point commun des lignes de projection, ſont repréſentés dans cette hypotheſe par divers cercles ſur le planiſphere; & celui qui ne le ſçauroit pas, le reconnoîtra facilement, en imaginant le cone formé par toutes les lignes de projection qui paſſent par un de ces cercles de la ſphere, le cone, par exemple, que forment les lignes qui paſſent par le cercle dont la corde *βγζ*, repréſentée par *bgB* ſur le planiſphere, eſt le diametre, cone qui eſt ici figuré par ſa ſection angulaire la plus aigue, *βpB*; car ces deux lignes, *βζ*, *bB*, font les mêmes angles avec les deux côtés de cette ſection *; par conſéquent les deux baſes du cone qui ont *ζβ*, *bB* pour diametre, ſont de même nature. On ſçait de plus, que les angles que font les cer-

* L'angle *pβζ* ayant pour meſure la moitié de l'arc *pζ*, eſt égal à l'angle *pBb*; qui a pour meſure la moitié du quart-de-cercle *po*, moins la moitié du complément *ζo* de l'arc *pζ*: & l'angle *pζβ* meſuré par la moitié des arcs *po*, *oβ*, eſt égal à *pbB*, meſuré par la moitié des arcs *pO*, *oβ*.

cles de la ſphere, répondent à des angles qui leur ſont égaux ſur le planiſphere.

Quant à la conſtruction du planiſphere propoſé, & au moyen ſoit de tracer ſur celui qui n'eſt chargé que de ſes lignes principales, les autres cercles dont on peut avoir beſoin, ſoit de diviſer ces cercles en dégrés, il eſt évident d'abord, que tout cercle, grand ou petit, qui eſt parallele au plan de projection, y eſt repréſenté par un cercle qui a pour centre le point repréſentatif de l'axe, du ſommet duquel partent les lignes de projection; & que les parties de chacun de ces cercles de la ſphere, ſont proportionnelles aux parties correſpondantes de celui qui en eſt la projection; c'eſt pourquoi les degrés de ceux-là ſont repréſentés par des arcs égaux ſur le planiſphere. Pour les autres cercles de la ſphere, ceux qui les repréſentent, ont un centre propre, différent tant du point qui repréſente le pole du cercle de la ſphere, que du point qui en repréſente le centre; ainſi dans la ligne *bEB*, *Fig.* 17, le point *G* eſt le centre propre du cercle par lequel celui qui a pour diametre *βγϐ*, eſt repréſenté ſur le plan de l'équateur; le point *E* eſt la projection du pole *E* de ce cercle de la ſphere, & le point *g* eſt la projection de ſon centre *γ*). Et les dégrés de chacun de ces cercles de la ſphere non-paralleles au plan de projection, répondent à des arcs inégaux de celui qui les repréſentent.

Je ſuppoſe qu'on ait un cercle diviſé en ſes dégrés & minutes, & qu'on le prenne pour un grand cercle de la ſphere, ſur le plan duquel on doive en faire la projection. Soit, par exemple, *Fig,* 18, *AOXIaoxi* l'équateur; ſoient tirées par le centre *CP* de ce cercle, deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, telles que *IPi*, *oTPEOB*, qui repréſentent deux cercles horaires. Si de l'interſection *I* de l'une de ces lignes avec la circonférence *AOXIaoxi*,

on tire à toutes les divisions de cette circonférence, des droites qui coupent le cercle *oTPEOB* perpendiculaire à *IPi*, ce cercle se trouvera divisé en ses dégrés, &c. *IPi* sera pareillement divisé en ses dégrés, &c. par des droites tirées du point *O*, à toutes les divisions de la circonférence *AXIaxi*. Tout autre cercle horaire, tel que *ahPZA*, peut être divisé de même, par des droites tirées de son pole *X*: mais il n'est pas nécessaire que beaucoup de cercles horaires soient tracés & divisés jusqu'à leurs moindres aliquotes possibles, sur le planisphere; une alidade mobile autour du centre *C*, & divisée comme *oTPEOB*, autant qu'on le pourra, tiendra lieu des autres cercles horaires. Il est à propos que cette alidade excéde beaucoup en longueur le diametre du planisphere. Cela donné, soit.

LEMME PREMIER.

Décrire sur le planisphere un cercle quelconque, oblique à ce plan, & le diviser en dégrés.

§. I. Décrire le cercle dont on a le pole *E*, *Fig.* 18, & dont on connoît l'amplitude. [Ce que je nomme ici *amplitude*, a peut-être un autre nom; j'entends par ce terme, la distance *Eб*, ou *EG*, *Fig.* 17, du pole d'un cercle à sa circonférence.]

Portez l'alidade sur le point *E*, prenez de part & d'autre de ce point sur la droite *oPEO* des parties *Eb*, *EB* du même nombre de dégrés, & égales à l'amplitude du cercle désiré : trouvez le milieu *G* de la ligne *bB*, & du centre *G*, décrivez un cercle par les points *b*, *B*; ce cercle est celui qu'on désire. Pour trouver le point *G* avec justesse & promptitude, il sera bon d'avoir un instrument fait en zic-zac, composé de trois regles minces, *qf*, *fF*, *FQ*, mobiles sur deux clous *f*, *F*, dont les deux extremes *qf*,

FQ, ſoient juſtement égales entre elles, & à la moitié de la regle moyenne *fF*. Celle-ci étant diviſée à ſon milieu *N*, ſi on fait répondre les deux bouts *q*, *Q* de cet inſtrument, aux deux points *b*, *B* de la ligne *PEO*, & qu'on faſſe tomber le point *N* ſur cette ligne, il eſt viſible que *N* donnera le milieu *G* de l'intervalle quelconque *bB*. Le point *N* du zic-zâc ſera encore propre à recevoir la pointe du compas, & cela préſervera le planiſphere des macules que cette pointe y feroit.

SCHOLIE. Si c'étoit un grand cercle qu'il fallût tracer, on n'auroit pas beſoin d'en prendre le diametre entier ſur l'alidade, il ſuffiroit de compter autant de degrés au-delà du pole *E* donné, qu'il y en a entre ce point *E* & le centre *CP* du planiſphere, on trouvera juſtement le centre propre du cercle demandé. A l'égard d'un petit cercle, ſi on a le point *g* de projection de ſon centre (le moyen de trouver ce point eſt aiſé à découvrir), & qu'on prenne *EG* du même nombre de degrés que *Eg*, on aura le centre propre *G* du cercle de projection. Cette pratique ſera une reſſource pour les cas où le point *B* du cercle déſiré tomberoit trop loin du centre du planiſphere, & par-delà le bout de l'alidade. (Cette pratique eſt fondée ſur ce que la ligne par laquelle le centre d'un cercle eſt projetté ſur le planiſphere, fait avec la ligne qui en repréſente le diametre, le même angle que la ligne qui part du point commun aux lignes de projection, & paſſe par le centre propre du cercle repréſentatif, fait avec le diametre du cercle repréſenté. Ainſi la ligne $pg\gamma$, *Fig.* 17; fait avec *bB* l'angle *pgB*, égal à l'angle $p\mathrm{r}\beta$ de la ligne *pG* avec le diametre $G\beta$; & il ſuit de-là, que les lignes $pG\gamma$, $pG\mathrm{r}$, font des angles égaux avec la ligne *pEE*.)

§. II. *Tracer un grand cercle dont on a deux points.*

Soient *E*, *Z*, ces deux points, *Fig.* 18, il faut décrire

les arcs *TKI*, *hKX* des deux grands cercles qui ont les points donnés pour poles, l'interſection *K* de ces deux cercles, eſt le pole de celui qui paſſe par les points donnés *E*, *Z*.

COROLLAIRE. Ce §. fournit le moyen de décrire par un point donné, un grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné : car ayant trouvé le pole de celui-ci, le grand cercle qu'on décrira par ce pole, & par le point donné, ſera le requis.

§. III. *Connoître la valeur d'un arc quelconque de grand cercle, décrit ſur le planiſphere ; ou bien prendre ſur un grand cercle un arc d'une certaine quantité, dont un des termes ſoit donné.*

Soit *Tu*, l'arc donné du grand cercle *uTKI*, Fig. 18. Du pole *E* de ce cercle, tirez par les extremités de l'arc donné deux droites *ETo*, *Euy*, qui aillent juſqu'à la circonférence du grand cercle *AXIoi*, ſur lequel eſt formé le planiſphere ; l'arc *oy* de ce cercle compris entre les deux droites, donnera la valeur déſirée de l'arc *Tu* propoſé. La ſolution de l'autre cas eſt aiſée à appercevoir. Je ne m'arrêterai point à donner la raiſon de cette pratique, ni à montrer comment on peut connoître la valeur d'un arc de petit cercle.

LEMME SECOND.

Réſoudre tous les cas concernant les triangles ſphériques obliquangles, à l'aide du planiſphere propoſé ; c'eſt-à-dire, former ſur une baſe donnée dans le planiſphere, tout triangle ſphérique, comme PEZ, Fig. 18, 19, *dont on connoiſſe trois élémens, & découvrir les trois autres.*

Nous n'avons ici que ſix cas, & quelques-uns même ſont étrangers à notre objet ; cependant comme ils exigent

gent peu de discours, je ne les omettrai pas. Je ne prends dans les solutions suivantes, que les exemples les plus commodes.

§. I. *Tous les côtés d'un triangle sphérique étant connus, trouver tous les angles.*

Que *PEO*, l'une des droites qui passent par le centre du planisphere, *Fig.* 18, soit la ligne qui doit servir de base, en partant du point *P*. Prenez-y donc *PE*, équivalente à un des côtés donnés; décrivez autour du point *E*, comme pole, le cercle *bZB*, dont l'amplitude *Eb*, ou *EB* soit égale à un des autres côtés; puis ayant pris la valeur *PZ* du troisieme côté sur l'alidade, conduisez-la jusqu'à ce que le terme *Z* de ce côté tombe sur la circonférence du cercle *bZB*. Vous avez déja l'un des angles désirés, sçavoir *EPZ*, & il est évident que sa valeur est donnée par l'arc *OA* du grand cercle gradué du planisphere, lequel est compris entre la ligne *PEO* & l'alidade. Quant aux autres angles, si vous décrivez les deux grands cercles *uTKIV*, *mhKXM*, qui ont les points *E*, *Z*, pour poles, puis celui *muZEMV*, qui passe par ces points (ce qui rend le triangle *PEZ* proposé, complet), les arcs *Tu* & *hm*, ou *hKXM* des deux premiers, seront la mesure de l'angle *PEZ*, & de *EZP*, ou de son complément, & la valeur de ces arcs sera trouvée par le §. III. du Lemme précédent.

Autre exemple. Soit la circonférence du grand cercle *PZAHpzah*, sur lequel est formé un planisphere, *Fig.* 19, assignée pour servir de base à partir du point *P*. Prenez-y donc l'arc *PZ*, égal à un des côtés du triangle proposé; décrivez autour des points *P*, *Z*, comme poles, deux arcs *DEd*, *LEl*, des cercles qui ont pour amplitudes les deux autres côtés de ce triangle, l'intersection *E* de ces arcs sera le sommet de l'angle sphérique opposé à *PZ*,

& l'on achevera le triangle requis *PZE*, en décrivant les deux grands cercles *PEOtp*, *ZEMVz*, qui passent par le point *E* & par les points *P*, *Z*, cercles qui ont les points *I*, *K* pour poles. Cela fait, l'alidade portée sur le point *I*, montrera la valeur *OA* de l'arc qui mesure l'angle *EPZ*; portée pareillement sur le point *K*, elle donnera la mesure *hM* de l'angle *PZE*. Enfin, si l'on décrit le grand cercle *TKIVt*, qui a le point *E* pour pole, on aura l'arc *Vt* pour mesure de l'angle *PEZ*.

§. II. *Tous les angles d'un triangle sphérique étant connus, trouver ses côtés.* (Ce cas est un de ceux dont nous n'avons pas d'application à faire.)

Pour la solution de ce cas, il faut se rappeller ce qui a été dit dans la premiere Partie, sçavoir : que tout triangle sphérique correspond à quelque autre, de telle façon que les angles de l'un ont mêmes sinus que les côtés de l'autre; ces angles étant mesurés soit par ces côtés mêmes, soit par leurs complémens. Ainsi le cas proposé revient au précédent; car si on construit, *Fig.* 18 ou 19, le triangle *KIX*, dont le côté *KX* soit équivalent à *MH* ou *mh*, mesure du complément d'un des angles connus *PZE*, dont le côté *IX* soit équivalent ou égal à *OA*, mesure de l'angle *EPZ*, aussi donné, dont enfin le côté *KI* soit équivalent à *Tu* ou *Vt*, mesure du troisieme angle donné *PEZ*; il est visible que les points *I*, *K*, sont poles des deux grands cercles *TPEOt*, *ZEMV*, qui par leur intersection avec *ahPZA*, forment le triangle sphérique *PZE*, dont il falloit déterminer les côtés.

§. III. *Deux côtés d'un triangle sphérique, & l'angle qu'ils comprennent, étant donnés, trouver le reste.*

Conduisez l'alidade, *Fig.* 18, jusqu'à ce qu'elle fasse un angle égal au donné, avec *TPEO*, l'une des droites qui traversent le planisphere; puis prenez sur *TPEO*,

& sur l'alidade, les deux parties *PE*, *P* ; équivalentes aux deux côtés donnés, & trouvez le grand cercle qui passe par les points *E*, *Z*, &c. Ou bien, prenez dans la circonférence du grand cercle, sur lequel est formé le planisphere, *Fig.* 19, l'arc *PZ* égal à un des côtés donnés, puis prenez sur le cercle *AOXa*, dont *P* est pole, la partie *AO*, qui est mesure de l'angle donné, & décrivez le grand cercle *PEOp*, qui passe par les points *P*, *O*; prenez ensuite sur ce cercle la partie *PE*, équivalente à l'autre côté donné, & décrivez un grand cercle *ZEMVz*, par les points Z, *E*, &c.

§. IV. *Un côté d'un triangle sphérique, & les deux angles adjacens étant donnés, trouver le reste.*

Prenez sur une des lignes du planisphere la partie *PZ*, qui soit ou égale, *Fig.* 19, ou équivalente, *Fig.* 18 au côté donné. Décrivez ou suppléez, par l'alidade, la ligne *TPEOt*, qui fasse avec *PZ* l'angle *EPZ*, égal à un des angles donnés, ainsi qu'au cas précédent; puis ayant décrit le grand cercle *mhKXM*, dont *Z* est le pole, lequel coupe la ligne *AZPha* en *h*; prenez une partie *hKXM* de ce cercle, qui soit équivalente à la mesure de l'autre angle donné; & par les points *Z*, *M*, décrivez un grand cercle *ZEMV*: son intersection *E*, avec la ligne *TPEO*, déterminera les parties *PE*, *ZE*, équivalentes aux côtés requis du triangle proposé.

§. V. *Deux côtés d'un triangle sphérique, & l'angle adjacent à un de ces côtés étant donnés, trouver le reste.*

REMARQUE. C'est le côté auquel est adjacent l'angle donné, qui peut seul dans ce cas servir de fondement à l'opération.

Prenez sur la droite *APa*, *Fig.* 18, la partie *PZ*, équivalente à celui des côtés donnés, auquel est adjacent l'angle donné; puis ayant décrit le grand cercle *mhKXM*,

dont *Z* eſt le pole, prenez ſur ce cercle la partie *hXM*, meſure de l'angle donné, ou *hm*, meſure de ſon complément, & décrivez un grand cercle *mZEM*, par le point *Z*, & par l'un ou l'autre des points *m*, *M*; conduiſez enſuite l'alidade juſqu'à ce que ſon point *E*, qui eſt le terme de la partie *PE*, équivalente au ſecond côté donné, tombe ſur la circonférence *mZEM*, & le triangle propoſé ſera achevé.

Autrement: Prenez ſur la circonférence *AZPha*, *Fig.* 19, l'arc *PZ*, égal à celui des côtés donnés, auquel eſt adjacent l'angle donné; puis prenez ſur la ligne *hXH*, dont *Z* eſt le pole, la partie *hXM*, meſure de l'angle donné, & décrivez un grand cercle *ZEMV*, par les points *Z*, *M*; décrivez enſuite autour de *P*, comme pole, un arc *DEd*, du cercle qui a pour amplitude l'autre côté donné du triangle, l'interſection *E* de cet arc, avec le grand cercle *ZEMV*, détermine la partie *ZE* de ce cercle, qui eſt équivalente au troiſieme côté du triangle; & ce triangle ſera achevé, en décrivant le grand cercle *PEOt*, auquel appartiennent les points *P*, *E*.

§. VI. *Deux angles d'un triangle ſphérique, & le côté oppoſé à l'un de ces angles étant donnés, trouver le reſte.*

La ſolution de ce cas eſt donnée par la précécedente; par la raiſon qui a été alléguée ci-deſſus (& elle en dépend néceſſairement, lorſque le triangle n'eſt pas rectangle); car ſi on forme le triangle *KIX*, dont le côté *IX* ſoit égal, *Fig.* 18, ou équivalent, *Fig.* 19 à *OA*, meſure de l'angle donné *EPZ*, dont le côté *IK* ſoit équivalent à *Tu*, meſure de l'autre angle donné *PEZ*, dont enfin l'angle *KXI* ſoit meſuré par *ha*, égale ou équivalente au côté donné *PZ*; il eſt aiſé de voir que *I*, *K*, ſont les poles des deux grands cercles *TPEO*, *ZEMV*, qui par leur interſection avec *AZPh*, forment le triangle ſphérique *PEZ*,

dont j'ai supposé qu'il falloit déterminer les côtés *PE*, *ZE*, & l'angle *EZP*.

SCHOLIE. Lorsqu'un des angles donnés est droit, ce cas peut encore recevoir une solution particuliere & directe, dont nous aurons un exemple dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE PREMIER.

Solution de la plûpart des Problemes proposés dans la premiere Partie, par le moyen d'un Planisphere.

LE Planisphere construit sur le plan de l'équateur, est celui dont l'usage sera le plus commode; & il seroit à désirer qu'il s'étendît 29 ou 30 dégrés par-delà la circonférence de l'équateur, afin d'embrasser tout le zodiaque dans son étendue. Je suppose que les principales étoiles situées dans la partie du ciel à quoi il répond, y sont marquées dans leurs places respectives, & que le limbe de cet instrument, ainsi que l'écliptique, sont divisés de maniere, que le lieu du Soleil, & celui d'une planete quelconque, puissent aussi y être assignés pour tel tems qu'on voudra.

PROBLEME PREMIER.

La hauteur & l'angle azymuthal d'un astre étant donnés, ainsi que sa déclinaison, &c. trouver l'heure & la hauteur du pole.

Ce Probleme est dans l'espece du cinquieme cas du Lemme second de cette Partie. Pour le résoudre, prenez sur le planisphere, *Fig.* 18, la valeur *PE* du complément de la déclinaison de l'astre, & supposez que le point *P* est le lieu de l'astre, & *E* le pole, il faudra faire *PZ* équivalente au complément de la hauteur donnée, & l'angle *PZE* égal à l'angle azymuthal, &c. l'angle *PEZ*

sera l'angle horaire dans cette hypothese, & EZ le complément de la hauteur du pole, &c.

PROBLEME II.

Les hauteurs contemporaines de deux astres étant données; trouver l'heure de l'observation, la hauteur du pole, l'angle azymuthal de l'un ou de l'autre astre.

Soient E, E', *Fig.* 20, 21, 22, 23, les lieux des deux astres. Autour de ces points, comme poles, décrivez deux cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, qui aient respectivement pour amplitudes, les complémens des hauteurs observées : ces cercles se couperont en deux points Z, ζ, dont l'un Z, marquera le point du ciel qui étoit au zénith, au moment de l'observation. L'alidade portée sur Z, représentera le méridien ; la différence d'ascension droite du point Z & du Soleil, donnera l'heure ; PZ sera la valeur du complément de la hauteur du pole, &c.

SCHOLIES. I. Lorsque les deux intersections des cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, se trouveront de même part de l'équateur, les circonstances de l'observation feront connoître lequel de ces deux points indique le vrai zénith. Il faudra voir, par exemple, si les astres ont été observés de différens côtés du méridien, *Fig.* 20, ou de même part, *Fig.* 21, &c.

II. On a dû comprendre que deux planispheres sont nécessaires, l'un ayant le pole arctique pour centre, & l'autre le pole antarctique; & il y aura des mêmes étoiles marquées sur l'un & sur l'autre de ces plans. Cependant il est possible, que l'opération requise pour ce Probleme, ne soit pas pratiquable directement ni sur l'un ni sur l'autre planisphere. C'est ce qui arrivera dans quelques-uns des cas où les deux astres observés, ou l'un des deux,

déclineront beaucoup du côté du pole abbaiſſé: car ſi on prend le planiſphere où eſt ce pole, le point du vrai zénith peut ne pas ſe trouver dans ſon étendue; & ſi l'on prend l'autre planiſphere, on peut n'y pas trouver, ni ſur ſon alidade non plus, les deux centres propres G, G', des cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, qui doivent être décrits autour des aſtres E,E', comme poles. Il faut en ce cas, réſoudre le Probleme par une opération indirecte, telle que celle-ci.

On ſuppoſera que le grand cercle ſur lequel eſt conſtruit le planiſphere, repréſente le cercle horaire de l'un des aſtres (E), *Fig.* 24, & y ayant pris un arc POE, égal à la diſtance de cet aſtre à l'un des poles, on décrira par le point P un arc $PO'E'$ de grand cercle, dont l'angle OPO' avec POE, ait pour meſure la différence donnée des aſtres E, E' en aſcenſion droite; ainſi $PO'E'$ repréſentera une portion du cercle horaire de l'autre aſtre (E'), & ſi $PO'E'$ eſt équivalent à la diſtance de ce ſecond aſtre au pole P, E' ſera le lieu de cet aſtre, relativement à l'hypotheſe. Cela fait, on décrira autour des points E, E', comme poles, les cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, définis ci-deſſus, & on fera paſſer par Z l'une de leurs interſections, & par P, un grand cercle PZA, qui repréſentera le méridien; l'angle OPA, ou $O'PA$ de l'un des cercles horaires avec PZA, ſera donc l'angle horaire de l'un ou l'autre aſtre, au moment de l'obſervation, &c.

III. Si les obſervations des deux hauteurs ont été faites en des tems différens, dont l'intervalle ſoit connu, ſoient E, e' les lieux des deux aſtres obſervés. Décrivez une portion du parallele de l'un de ces aſtres, de l'aſtre e' par exemple, & prenez ſur ce parallele un arc $e'E'$, équivalent au tems écoulé entre les obſervations; prenez, dis-je, cet arc, ou en avançant dans la direction du mouvement journalier, ou en retrogradant contre cette direc-

tion

tion : il faut avancer, si la hauteur de l'astre e' a été prise avant celle de l'autre astre, rétrograder dans le cas contraire. Le point E' représentera le lieu d'un astre idéal, qui auroit été observé à la hauteur de l'astre réel e', au moment de l'observation de l'autre astre E. Ainsi prenez les points E, E', pour poles des cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, & Z; l'une des intersections de ces cercles, marquera le point du ciel qui aura été au zénith, au moment de l'observation de l'astre réel E. On doit voir par-là ce qu'il faut faire, lorsqu'on a les observations de deux hauteurs différentes d'un seul astre.

PROBLEME V.

La hauteur du pole, celle d'un astre, & sa déclinaison étant données, trouver l'heure, &c.

Ce Probleme est tout résolu *Fig.* 18, par le §. I. du second Lemme de cette Partie, E marquant le lieu de l'astre, Z le zénith, &c.

PROBLEME VI.

La hauteur du pole, la déclinaison d'un astre, & son angle azymuthal étant donnés, trouver l'heure & la hauteur de l'astre.

Ce Probleme est tout résolu *Fig.* 18, par le §. V. du second Lemme, E marquant, non le pole comme on a supposé au Probleme premier, mais le lieu de l'astre, & EPZ son angle horaire, &c.

PROBLEME VII.

La hauteur du pole étant donnée, & deux astres dont les déclinaisons, &c. sont connues, étant vûs dans un même vertical, trouver l'heure de l'observation, l'angle azymuthal, &c.

Soient E, E' les lieux des deux astres, *Fig.* 25. Par ces points décrivez un grand cercle $ENFE'$, puis du centre P, & d'un rayon équivalent au complément de la hauteur du pole, décrivez un arc de cercle $Zi\zeta$, qui coupera le grand cercle $ENFE'$ en deux points Z, ζ, dont l'un Z, montrera le point du ciel qui étoit au zénith au moment de l'observation. Les circonstances de cette observation feront connoître lequel des points Z, ζ, indique le vrai zénith. Au lieu de décrire l'arc $Zi\zeta$, il suffira de marquer sur l'alidade le terme Z, de sa partie équivalente au complément de la hauteur du pole, & de conduire cette piece jusqu'à ce que son point Z tombe sur la circonférence $ENFE'$ en Z ou en ζ.

PROBLEME VIII.

La hauteur du pole étant donnée, & deux astres dont les déclinaisons, &c. sont connues, étant vûs dans un même almicantarath, trouver l'heure, &c.

Soient E, E' les lieux des deux astres, *Fig.* 26 : par ces points, décrivez un grand cercle $E'NEF$, puis ayant pris le milieu N de l'arc ENE', décrivez par ce point & par le pole Q du cercle $E'NEF$, le grand cercle $Q\circ N$; il est aisé de reconnoître que ce dernier est un de ceux qui passoient au zénith au moment de l'observation, puisqu'il est perpendiculaire au cercle $E'NEF$, & que chacun de

ses points est, ainsi que N, à une même distance des points E, E', qui sont à une même hauteur. Ainsi ayant décrit du centre P un cercle $Zi\zeta$, dont l'amplitude soit égale au complément de la hauteur du pole ; ce cercle coupera le vertical $Q\phi N$ en deux points Z, ζ, dont l'un marquera le point céleste qui étoit au zénith au moment de l'observation, & l'on considerera les circonstances de cette observation, pour faire un bon choix entre les points Z, ζ.

PROBLEME IX.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre astres, dont deux sont vûs dans un même vertical, & deux dans un autre, trouver l'heure, la hauteur du pole, &c.

Soient E, E', *Fig.* 27, les lieux des deux premiers astres ; ϵ, ϵ', les lieux des deux autres, si leur observation est contemporaine à celle de la premiere paire ; ou bien, soient ϵ, ϵ' les lieux des astres idéaux qui auroient passé au vertical de la deuxieme paire des astres réels au moment de l'observation de ceux de la premiere paire (ce qui doit être sous-entendu pour tout astre, quand je ne l'aurois pas exprimé). Décrivez un grand cercle $ENE'F$ par les points de la premiere paire, & un autre grand cercle $\epsilon'N'F\epsilon$ par ceux de la seconde. Ces cercles seront des verticaux, & leur intersection en Z, z, donnera les points du zénith & du nadir, pour le moment de l'observation de l'astre réel Z.



PROBLEME X.

Connoissant les déclinaisons, &c. de quatre astres, dont deux sont vûs dans un même almicantarath, & deux dans un autre, trouver l'heure, &c.

Soient E, E', & ϵ, ϵ', *Fig.* 28, les lieux des deux paires d'astres. Décrivez les deux grands cercles $Q\Phi ZN$; $Q'Z\Phi'N'$, qui sont perpendiculaires aux grands cercles $E'NEF$, $\epsilon N'\epsilon' F'$, sur lesquels sont les points donnés E, E', & ϵ, ϵ', & qui sont respectivement équidistans de ces points ; ces cercles $Q\Phi N$, $Q'\Phi' N'$, seront des verticaux, par la raison rapportée au Probleme VIII, & leur intersection en Z, z, donnera le zénith & le nadir, pour le tems d'une des observations.

PROBLEME XI.

Connoissant les déclinaisons, &c. de quatre astres, dont deux sont vûs dans un même vertical, & deux dans un même almicantarath, trouver l'heure &c.

Soient E, E' (*Fig.* 29) les lieux des astres de la 1re paire, & ϵ, ϵ', ceux des astres de la deuxieme. Décrivez par les points E, E', un grand cercle $ENFE'$, & un autre grand cercle $Q'\Phi ZN'$, qui soit perpendiculaire au grand cercle $\epsilon' N'\epsilon F'$, sur lequel sont les autres points ϵ, ϵ', & qui soit équidistant de ces points ; ces cercles $ENFE'$, $Q'\Phi N'$, sont des verticaux, ainsi leur interfection donne le zénith pour le tems d'une des observations.

PROBLEME XII.

Connoiſſant les déclinaiſons, &c. de trois aſtres, dont deux ſont vûs dans un même vertical, & du troiſieme deſquels on a la hauteur, trouver l'heure, la hauteur du pole, &c.

Soient E, E', *Fig.* 30, les lieux des aſtres vûs à un vertical commun, & ε le lieu du troiſieme aſtre. Ayant tracé le grand cercle $ENE'F$ par les points E, E', décrivez autour du point ε, comme pole, le cercle $Z\beta\zeta$, qui ait pour amplitude le complément de la hauteur donnée de l'aſtre ε; ce cercle coupera le premier en deux points, dont l'un Z repréſentera le zénith, pour le moment de l'une des obſervations.

PROBLEME XIII.

Connoiſſant les déclinaiſons, &c. de trois aſtres, dont deux ſont vûs dans un même vertical, dont on a l'angle avec le vertical du troiſieme aſtre, trouver l'heure, la hauteur du pole, &c.

Pour la ſolution de ce Probleme, il faut trouver par préalable le complément $E\varepsilon$, *Fig.* 30, de la hauteur de l'aſtre ε, qui eſt ſolitaire ſur ſon azymuth, ou plutôt le complément ZR de la hauteur du point d'interſection R du grand cercle $ENE'F$ avec le grand cercle $Q\varepsilon R$, qui y eſt perpendiculaire, & paſſe par le point ε. Décrivez d'abord ce cercle $Q\varepsilon R$, ce qui eſt très-facile, puiſque Q eſt le pole du cercle $ENE'F$, & vous aurez $Q\varepsilon$ complément du côté εR du triangle rectangle εRZ, avec l'angle εZR ou $M'ZM$, oppoſé à ce côté εR. C'eſt ce triangle εRZ, dont on connoît trois élémens, qu'il s'agit d'achever de conſtruire : mais cela ne ſe peut qu'indirecte-

ment ; il faut faire pour cela une figure particuliere, telle que la *Fig.* 50 ou 51.

Prenez un quart, ou l'équivalent *qm'n* d'un quart de circonférence de grand cercle, dont *z* marque le pole : décrivez par ce point des cercles *mrz*, *m'ιz*, qui fassent un angle égal à celui *MZM'*, qui est donné par l'observation ; puis tracez un arc *f*ι du parallele à *mrz*, lequel ait pour amplitude *q*ι, égale au complément *Q*ι, trouvé dans la *Fig.* 30 ; enfin par l'intersection ι des cercles *f*ι, *m'*ι*z*, & par *q*, pole du cercle *mrz*, décrivez le grand cercle *q*ι*r* ; vous aurez *rz* pour valeur de l'arc *RZ* requis, *Fig.* 30, & vous y déterminerez ainsi le point *Z* du zénith, &c.

PROBLEME XIV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de deux astres, avec l'angle de leurs azymuths, au moment où ils sont vûs dans un même almicantarath, trouver l'heure, &c.

Soient *E*, *E'*, les lieux de ces astres, *Fig.* 26 ; le vertical *Q*⊙*ZN*, dont les points *E*, *E'* sont équidistans, est déterminé, & ce grand cercle divise par la moitié l'angle donné des azymuths des points *E*, *E'* ; on connoît donc au triangle rectangle *ENZ* deux élémens, outre l'angle droit, sçavoir le côté *EN*, moitié de la distance des deux astres, & l'angle *EZN* opposé à ce côté ; & l'on est, quant à ce triangle *ENZ*, dans le même cas que celui du Probleme précédent, pour le triangle ι*RZ* : ainsi on obtiendra la solution désirée, par un procedé pareil à celui qui a donné *RZ*.

PROBLEME XV.

La hauteur d'un astre, & l'angle de son azymuth avec celui d'un autre astre étant donnés, ainsi que leurs déclinaisons, &c. trouver l'heure, & la hauteur du pole, &c.

Soit E', *Fig.* 20, 21, 22, 23, le lieu du premier astre, & E celui du second : on connoît donc trois élémens du triangle EZE', sçavoir EE' distance des deux astres, $E'Z$ complément de la hauteur de l'astre E', & l'angle EZE' compris entre les azymuths ZEM, $ZE'M'$, lequel est opposé au côté EE' (c'est l'espece du cinquieme cas du second Lemme de cette Partie) ; mais ce triangle ne peut pas être résolu directement sur la Figure qui donne $E'E$, il faut en faire une particuliere, telle que la 18 ou la 19, où vous supposerez que P représente l'astre E', & que PE équivaut par conséquent à $E'E$, & PZ à $E'Z$: vous déterminerez par l'opération marquée au §. V. du second Lemme, le troisieme côté EZ du triangle en question, ou bien l'angle EPZ, qui est le même que $EE'Z$, & avec l'un ou l'autre de ces élémens, vous serez en état de trouver le sommet Z du triangle EZE', *Fig.* 20, 21, 22, 23, puisque vous aurez ou bien la valeur des trois côtés de ce triangle, ou la valeur de deux côtés, & de l'angle qu'ils comprennent, ce qui est le cas du §. I, ou du §. III du Lemme cité.

Telles sont les opérations que j'avois à proposer. On reconnoît sans doute qu'elles sont faciles & expéditives : il n'est pas besoin que j'insiste sur ce point, mais il en est un sur lequel je dois m'arrêter avant que de finir ce Chapitre, sçavoir sur la qualité que j'ai attribuée à ces opérations ; de n'être pas sujettes à un grand défaut ; d'être peu inférieures en justesse au résultat du calcul. Je ne sçais si cha-

cun en conviendra : on estime peu les opérations méchaniques en comparaison du calcul ; on s'en défie, & peut-être quelques personnes sont-elles prévenues trop généralement contre ce genre d'opérations. Pour moi je crois qu'on doit distinguer méchanique & méchanique ; il faut donc entrer en quelque discussion sur ce point.

On pourroit, par exemple, se prévaloir contre ce que j'ai avancé, d'une autorité que j'avoue être d'un très-grand poids, sçavoir celle de M. Bouguer, ce Sçavant si versé dans les matieres Astronomiques. Cet illustre Auteur de la Piece qui a remporté le Prix de 1731, *sur la méthode d'observer en mer la déclinaison ou variation de la Boussole*, traite dans la deuxieme Partie de cet excellent Ouvrage, *des moyens de déterminer cette variation*, par l'observation d'un astre, c'est-à-dire, des moyens de trouver l'angle azymuthal de quelque astre ; & après avoir assigné trois especes d'observations qui donnent cet angle avec facilité, il tourne ses réflexions sur le cas où l'on n'auroit pas eu la commodité de faire aucune de ces observations, mais où on en auroit fait quelqu'autre. » Il faudra alors » (dit le judicieux Astronome) avoir recours au calcul, » pour trouver par la Trigonométrie Sphérique (ou au» trement), le vrai azymuth. Il n'y a gueres lieu d'espe» rer (ajoûte-t-il) qu'on puisse éviter la longueur de l'opé» ration, *en se servant de quelques figures*, ou en employant » quelques instrumens particuliers. On ne peut toûjours » parvenir, *par tous ces moyens*, qu'à une détermination » *trop grossiere*, & trop éloignée d'une certaine exacti» tude. »

Voilà ce qu'on peut m'opposer. Je remarque pour réponse, que dans la suite de l'article cité, M. Bouguer parle seulement de ces *instrumens particuliers*, qui donnent tout d'un coup la situation du méridien, & je conviens

que

que l'usage en est blâmable avec grande raison. (Outre les inconvéniens de ces instrumens, on doit considérer que l'usage en est trop borné, parce qu'il suppose que la hauteur du pole est connue). Mais il y a, ce me semble, une différence non-légere entre ces pratiques rejettées spécialement par M. Bouguer, & celles que j'ai proposées; quoique celles-ci consistent à *se servir de quelques figures*, & qu'elles soient ainsi enveloppées dans la censure générale portée par le sçavant Géometre.

1°. Le plus parfait de ces instrumens particuliers, qui étant exposé au Soleil, montre la situation du méridien; *sera toûjours sujet à quelques défauts dans sa construction particuliere.* (Ces défauts sont les mêmes pour le moins, que ceux que M. Bouguer a justement relevés dans l'Arbalestrille, *Part.* I. *Ch.* IV §. 32, de la Piece qui a mérité le prix de 1729, touchant la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres : car un demi-cercle mobile, qui entre dans la composition de cet instrument, le plus propre à montrer la situation du méridien, & dont l'ombre doit être observée, peut *n'être pas bien perpendiculaire à la fleche*, ou regle qui le porte, &c.)

2°. *On n'a point d'égard à la réfraction dans l'usage de ces instrumens.* Ce sont des remarques de M. Bouguer même.

3°. Ces instrumens ne peuvent être que petits, ils auroient trop de poids s'ils étoient grands. M. Bouguer qui a bien voulu prendre la peine de marquer la forme de celui qui seroit le meilleur, ne donne que 9 ou 10 pouces de rayon au demi-cercle, dont l'ombre doit être observée (encore est-ce beaucoup, & je pense qu'un instrument fait sur cette proportion, seroit bien plus pesant qu'un grand Quartier Anglois). Ainsi la distance du bord qui jette l'ombre au point qui doit la recevoir, est fort petite, & cela entraîne le même inconvénient, que celui

auquel est sujet le Quartier Anglois, dont l'arc qui porte la pinnule exposée au Soleil, est d'un moindre rayon que l'arc par lequel vise l'Observateur ; inconvénient ou *défaut* que M. Bouguer a traité de *considérable*, & prouvé tel, *Part.* I. *Ch.* IV. §. 33. de la Piece qui a remporté le Prix de 1729.

4°. Ajoûtons que la partie d'ombre que l'on doit faire tomber sur certain point de l'instrument particulier dont il s'agit, est très-difficile à discerner ; car cette partie d'ombre est celle qui répond au centre du Soleil, & elle appartient à une pénombre dont les limites verticales sont trop peu sensibles, ainsi que le même Auteur le démontre, §. 37, de la Piece citée de 1729.

Voilà déja quatre chefs, eu égard auxquels M. Bouguer a pû juger très-justement, que *l'on ne parviendroit qu'à une détermination trop grossiere* du méridien, à l'aide des instrumens particuliers dont il s'agit. Mais quand tous ces inconvéniens cesseroient, il en reste nécessairement un cinquieme, qui est considérable, lorsque le pole a certaine hauteur, & qui suffiroit seul pour vicier la détermination qu'on prétendroit faire avec ces instrumens particuliers. Ce chef est peut-être indiqué, mais confusément, dans une remarque de l'art. cité de la piece de 1731, *pag.* 34, sçavoir, que *l'on observe d'une maniere implicite la hauteur du Soleil, & son azymuth*, par ces instrumens, *& que comme on est toûjours exposé à commettre ces erreurs inévitables qui se trouvent dans toutes les opérations, elles doivent être ici à peu près les mêmes, que lorsqu'on cherche la hauteur d'un astre & son azymuth, par le moyen d'un Quartier Anglois.*

Voici le point. Selon une autre remarque importante de M. Bouguer, *Part.* III. *Art.* VIII. *pag.* 52 de cette Piece de 1731, *il y a en mer grande difficulté de mettre un*

instrument dans une situation exactement verticale, en regardant l'horison sensible....; il est très-facile de se tromper, c'est-à-dire, d'écarter le plan de l'instrument de la situation verticale, *de 25 ou 30 minutes, & même de* 40 *ou* 50, *sans qu'on s'en apperçoive.* Or cette erreur, lorsqu'on se sert du Quartier Anglois, pour prendre la hauteur & l'azymuth d'un astre, en produit une sur la position de cet azymuth, qui est plus ou moins grande, suivant que l'astre est plus ou moins élevé. Si l'on nomme I la tangente de la quantité dont l'instrument est éloigné de la situation verticale, & $H = \frac{rh}{k}$ la tangente de la hauteur de l'astre; le sinus de la quantité dont on s'éloigne de son vrai azymuth, est précisément égal à $I\frac{H}{r} = I\frac{h}{k}$. Au reste on a communément la liberté d'observer un astre peu élevé, & d'exténuer par conséquent le mauvais effet de l'inclinaison du Quartier Anglois. Que si l'on employoit l'instrument particulier décrit par M. Bouguer, *Par.* II. *Art.* VII, de la Piece de 1731, l'inclinaison *inévitable* de cet instrument, produiroit aussi une erreur dans la détermination du méridien: mais cette erreur ne dépend point dans sa quantité du plus ou du moins de hauteur du luminaire, elle dépend de la hauteur du pole, nommant i le sinus de la quantité dont l'instrument est éloigné de la situation verticale, & $S = \frac{rs}{c}$ la tangente de la hauteur du pole; la tangente de ce dont on s'écarteroit du méridien, seroit égale, tout le reste étant correct, à $i\frac{S}{r} = i\frac{s}{c}$, quantité considérable, lorsque le pole a certaine hauteur.

Concluons donc hardiment, qu'*il vaut infiniment mieux déterminer la hauteur & l'azymuth d'un astre bien situé*, par

le moyen d'un instrument simple, tel que le Quartier Anglois, *& déduire le reste par supputation*, *que de vouloir le trouver par la seule construction d'un instrument* composé de plusieurs pieces, puisque cet instrument est d'autant plus fautif, qu'il est plus compliqué, & que l'on seroit exposé, dans son usage, à une erreur double ou triple, pour le moins, de celle qui naît du défaut qui peut se glisser dans une observation simple.

Mais que faut-il penser du résultat d'une observation simple, trouvé par quelques figures subsidiaires à la supputation ? Qu'on rejette encore cette pratique, j'y consens, si les figures sont petites, mais si elles sont grandes, je n'y vois pas d'inconvénient fort grave. Par exemple, si on donnoit 21 pouces de rayon à l'équateur *AOXax* du planisphere (ce qui est un peu moins que celui qu'on donne au Quartier Anglois), les dégrés seroient sur ce cercle d'environ quatre lignes deux cinquiemes, & l'on pourroit y marquer leurs vingt-quatriemes parties (les degrés auroient à la vérité une fois moins d'étendue auprès du centre de l'instrument). Cela posé, se trouveroit-il tant d'erreur dans la construction de l'instrument, en commettroit-on tant d'ailleurs, soit sur le centre propre *G* d'un cercle *Zbζ*, *Fig.* 20, 21, 22, 23, soit sur son rayon, que le trait de la circonférence de ce cercle s'écartât de plus de 4 ou 5 minutes du lieu où il devroit être ? c'est-à-dire, seroit-on exposé dans le cas du Probleme second, à faire le complément *ZE* de la hauteur d'un astre, de 4 ou 5 minutes plus grand ou moindre sur le planisphere, qu'on ne l'a trouvé par l'observation ? Ce seroit beaucoup, ce me semble ; supposons néanmoins cette erreur de 5 minutes, ce qui est un douzieme de degré. Or selon M. Bouguer, *Part.* III. *Art.* XII. *pag.* 62, de la Piece citée de 1731, *on doit supposer de 15 minutes, l'erreur que d'ha-*

biles marins peuvent commettre dans l'observation de la hauteur d'un astre, faite lorsque cet astre *en change sensiblement* (& nous verrons dans la suite, que c'est dans cette circonstance qu'une observation de hauteur détermine l'heure le plus sûrement.) L'erreur totale dans la hauteur attribuée à l'astre sur le planisphere, pourra donc être de 20 minutes, & l'erreur qui naîtra de celle-là, dans la détermination de l'heure, sera plus grande d'environ un tiers en sus, que celle qui se trouvera dans la détermination exécutée par le calcul. * Si l'erreur de celle-ci va, par exemple, à une minute & demie de tems, l'erreur de celle-là pourra être de deux minutes, & n'ira gueres au-delà.

Je laisse à juger sur cela, de la grandeur qu'on devra donner au rayon de l'équateur du planisphere. J'observe seulement qu'il faut que ce cercle soit tracé sur du métal, & que l'alidade soit pareillement de métal, afin que leurs divisions soient plus exactes. Il me semble au reste, que pour ne point maculer l'instrument, par les divers traits que chaque détermination requerera, on pourra le couvrir d'un papier fin & transparent, sur lequel on fera ces traits.

* Je mets en même proportion les erreurs sur la hauteur, & les erreurs sur l'heure, trouvées par les deux voies différentes, parce que l'erreur particuliere commise sur la hauteur, en employant le planisphere, est la seule qui doive entrer ici en considération. Je regarde toute autre méprise comme fort legere, ou bien comme acccidentelle, dans le cas pris pour exemple, & je la suppose évitable, lorsque les observations sont combinées avantageusement : telle est la méprise qu'on peut commettre, faute de bien discerner le vrai point d'intersection des cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$ Ce genre d'erreur n'est pas à négliger absolument, je l'avoue, mais il concerne une autre matiere de considération. Si l'on y étoit exposé à un dégré non-leger, ce seroit un signe que la combinaison des observations seroit désavantageuse à quelque égard en se servant même du calcul.



CHAPITRE II.

Moyens de simplifier les calculs pour l'invention de l'heure, solution des Problemes XV. & XVI, laissés I. Partie.

QUOIQUE j'aie proposé de se servir de figures subsidiaires au calcul, je suis bien éloigné d'estimer cette pratique au-dela de sa juste valeur; je ne prétends point qu'on doive s'en contenter. Je reconnois si bien l'importance du calcul, que je reviens à cette voie exacte, & que je vais m'appliquer à y procurer toute la simplicité & la facilité possibles.

Je porte d'abord mes réflexions sur le Probleme VII. On doit remarquer dans la *Fig.* 25, qui répond à ce Probleme, que le grand cercle *ENFE'*, sur lequel sont deux astres, a quelque point *F* plus voisin du pole que tous les autres qui sont de même part de l'équateur, & ce point est celui où le cercle *ENFE'* est coupé par le cercle horaire *QPF*, qui y est perpendiculaire. Si on connoissoit donc l'ascension droite du point *F*, & l'arc *PF*, dont je nomme le sinus y', la tangente Y', le cosinus x', &c. (& ce sont choses faciles à découvrir). Le Probleme dont il s'agit seroit très-aisé à résoudre par le calcul, car on obtiendroit l'angle horaire *FPZ*, par une simple analogie.

Soit t' le sinus de cet angle, u' son cosinus. On connoît, je le suppose, au triangle *PFZ*, outre son angle en *F*, deux élémens; sçavoir le côté *PF*, & *PZ* dont *S* est cotangente, & on demande l'angle *FPZ*, compris entre les côtés donnés; ainsi on est dans un cas de la quatrieme

classe (cas pareil à celui qui est régi par la troisieme formule du premier Lemme de la premiere Partie). On a donc, *cotang.* $PFZ \times t + y'S = u'x'$. Mais l'angle PFZ étant droit comme on l'a remarqué, sa cotangente est zéro; & il reste $u' = \frac{y'}{x'} S = \frac{Y'S}{r}$. * Cette valeur de u' est plus simple assûrément que celle qui résulte pour t (sinus de l'angle EPZ) de l'équation du second degré,

$$(rrX'X - 2rbX'X + rrXX)\, cctt \left.\begin{matrix} -2rX' \\ +2bX \end{matrix}\right\} r^3acst \left.\begin{matrix} + r^4aass \\ - rraaccXX \end{matrix}\right\} = 0, \text{ ou}$$

$$(rrX'X' - 2rbX'X + rrXX)\, tt \left.\begin{matrix} -2rX' \\ +2bX \end{matrix}\right\} raSt + rraa(SS - XX) = 0,$$

trouvée dans la premiere Partie.

J'ai dit que l'arc PF, & que l'ascension droite du point F, sont faciles à découvrir (& je vais le montrer). Il y a plus, dans le cas où les deux astres vûs ensemble sont des fixes, on peut égargner aux Navigateurs la peine de chercher ces choses & autres semblables, en formant des Tables où elles soient marquées. Ces Tables seroient peut-être assez utiles pour mériter qu'on y travaillât, car la même chose peut servir non-seulement à plusieurs Navigateurs, mais en plusieurs circonstances, comme l'on verra dans la suite : il ne resteroit donc au Marin à calculer l'ascension droite, & la distance du point F au pole, que lorsque l'un des astres observés seroit une planete, ou bien lorsqu'il y auroit eu de l'intervalle entre les observations.

* On peut encore trouver cette valeur de u' par un petit circuit, en considérant que lorsque le cercle $ENE'F$ est vertical, son point F est à sa plus grande digression, & s'éleve perpendiculairement à l'horison XMK, parce que sa route étant perpendiculaire au cercle horaire PF, elle concourt avec une petite portion du vertical $ENE'F$. Par conséquent, selon ce qu'on a vû (premiere Partie) le sinus h de la hauteur FM du point F, est égal à $\frac{rs}{x'}$. Cette valeur de h étant substituée dans la formule $rrh - rsx' = cy'u'$, on a $rs(rr - x'x') = cx'y'u'$; ou bien $rsy' = cx'u'$, d'où on déduit $u' = \frac{y'}{x'} \cdot \frac{rs}{c} = \frac{Y'S}{r}$.

Voici ce qu'il faudra faire alors, & en attendant que les Tables proposées soient construites.

Les complémens PE, PE', des déclinaisons des deux points E, E', étant donnés avec leur différence d'ascension droite, différence qui est mesure de l'angle EPE', & dont les sinus & cosinus ont été nommés ci-devant a, b, il faut chercher 1°. l'un ou l'autre des angles PEE', $PE'E$; je nomme le sinus du premier l, sa tangente L, son cosinus λ, sa cotangente Λ. Cela posé, on est dans un cas de la quatrieme classe, & on a $a\Lambda \pm yX' = bx$, d'où on déduit $\Lambda = \frac{bx \mp yX'}{a}$.

2°. L'angle PEE' étant connu, on peut trouver PF par une simple analogie; car outre l'angle droit on a deux élémens du triangle rectangle EFP, sçavoir l'hypothenuse PE, & l'angle PEE' ou PEF, opposé au côté désiré, ce qui est un cas de la troisieme classe; on a donc $y' = \frac{yl}{r}$.

3°. la différence d'ascension droite des points E, F, est mesure de l'angle EPF du même triangle rectangle EFP: je nomme son sinus g, son cosinus γ, sa cotangente Γ, &c. On trouvera cet angle par quelqu'une de ces équations très-simples: $\Gamma = \frac{xL}{r}$, $\gamma = \frac{Y'X}{r}$, $g = \frac{rl}{x'}$.

Observons que le Navigateur ayant connu l'angle PEE', pourroit se dispenser de chercher PF, & trouver l'angle horaire EPZ du point E, en résolvant par la regle de Trigonométrie, le triangle obliquangle PEZ, dont il a trois élémens, sçavoir les côtés PE, PZ, & l'angle PEE' ou PEZ, opposé à un de ces côtés. La regle consiste à chercher d'abord l'angle EPF, par l'équation $\Gamma = \frac{xL}{r}$, qui en donne la cotangente, puis à chercher l'angle FPZ

du triangle

du triangle rectangle *PFZ* par cette équation.*Cofin.*FPZ* $= \frac{\gamma Y}{C} = \frac{\gamma YS}{rr}$, la fomme ou la différence des angles *EPF*, *FPZ*, fera l'angle horaire requis du point *E*.

Voici les chofes dont on pourroit former des Tables, & en même tems la maniere de les trouver. 1°. La diftance *EE'* ou $\epsilon\epsilon'$, *Fig.* 20, 21, &c. de deux étoiles qui peuvent être obfervées conjointement. Pour trouver cette diftance (dont j'ai nommé ci-devant le finus δ, & le cofinus β), pofé qu'on ne l'ait pas déja dans les catalogues d'*étoiles*, on eft dans un cas de la premiere claffe, à l'égard du triangle *EPE'*, & on a $\beta = \frac{yy'b}{rr} \pm \frac{xx'}{r}$. b eft le cofinus de la différence d'afcenfion droite des deux étoiles.

2°. L'angle *PEE'* du cercle horaire d'une de ces étoiles, avec le grand cercle *ENEF*, qui leur eft commun. *EE'* étant connue au triangle *EPE'*, on eft dans un cas de la troifieme claffe, pour trouver fon angle *PEE'*, & on a $l = \frac{y'a}{\delta}$.

3°. La moindre diftance *FP* du cercle *ENEF* au pole; on vient de voir que le finus y' de cette diftance $= \frac{yl}{r}$.

4°. L'afcenfion droite du point *F*, ou bien l'angle *EPF*: on l'aura, comme j'ai déja dit, par une des équations $\Gamma = \frac{xL}{r}$, $\gamma = \frac{Y'X}{r}$.

5°. On peut ajoûter l'arc *EF*: cet arc fera trouvé par quelqu'une de ces équations, *fin.* $EF = \frac{yg}{r} = \frac{\Lambda Y'}{r}$, *tang.* $EF = \frac{y'G}{r} = \frac{\lambda Y}{r}$.

* Le fondement de cette équation eft que *PF* eft un côté commun aux deux triangles rectangles EFP, *ZFP*; ainfi on a ces deux analogies : $r : Y :: \gamma : Y'$, & $r ; C :: \text{cof.} FPZ : Y'$; donc $\gamma Y = rY' = C \text{ cof.} FPZ$, &c.

La distance de deux étoiles est une chose invariable. Les autres choses que j'ai marquées, sont sujettes à une petite variation, à cause du mouvement lent de l'axe terrestre autour des poles de l'écliptique. Pour remédier à cela, il faudra donner dans la Table les changemens que ces quantités variables reçoivent en certain nombre d'années.

SCHOLIES. I. L'équation du second degré, rapportée ci-dessus, pour t sinus de l'angle EPZ, s'accorde si bien avec celle qu'on a vûe pour u^t, que celle-ci peut être déduite de celle-là. Pour le montrer, je remarque 1°, que le coëfficient $rrX'X' \pm 2rbX'X + rrXX$, que peut avoir tt dans cette équation, est égal à $\frac{r^4aa}{Y'Y'}$.*

2°. $X = \frac{r\gamma}{Y'}$, & par conséquent $XX = \frac{rr\gamma\gamma}{Y'Y'}$; car on a au triangle rectangle EFP, $r : \gamma :: X' = \frac{rr}{Y'} : X$.

3°. $X' = \frac{b\gamma \pm ag}{Y'}$; car le triangle $E'FP$ étant rectangle, on a $r : cos. E'PF :: X' = \frac{rr}{Y'} : X' = \frac{r.cos.E'PF}{Y'}$; or par le second Lemme de la premiere Partie, $r.cos. E'PF = b\gamma \pm ag$.

* Cela est facile à trouver; car on a cette proportion : $Y'Y' : rr :: y'y' : x'x' = rr - y'y'$. Or $y'y' = \frac{yyll}{rr}$, donc $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{x'x'}{y'y'} = \frac{r^4 - yyll}{yyll} = \frac{1}{yy} \times \frac{r^4}{ll} - 1$. On a d'ailleurs cette proportion, $AA : rr :: rr - ll : ll$, ou bien $rr + AA : rr :: rr : ll$; donc $\frac{r^4}{ll} = rr + AA$, & $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{rr + AA - yy}{yy} = \frac{xx + AA}{yy}$. Or, $AA = \frac{bbxx \pm 2bX'xy + yyX'X'}{aa}$, donc $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{aaxx + bbxx}{aayy} \pm \frac{2bX'x}{aay} + \frac{X'X'}{aa}$. Multipliant donc tout par $rraa$, substituant rr à $aa + bb$, & X à $\frac{rx}{y}$, on trouve enfin, $\frac{r^4aa}{Y'Y'} = rrXX$, &c.

Les trois quantités qu'on vient de voir étant substituées dans l'équation pour t, & ayant tout multiplié par $Y'Y'$, elle devient :

$$r^4aatt - 2rrab\gamma SY't \mp 2rraagSY't + rraaSSY'Y' = rraarr\gamma\gamma.$$
$$+ 2rrab\gamma SY't$$

Deux termes où t est linéaire, se détruisent mutuellement, & tous les autres sont divisibles par $rraa$, ainsi il reste :

$$rrtt \mp 2gSY't + SSY'Y' = rr\gamma\gamma.$$

Substituant $gg + \gamma\gamma$ à rr, on a :

$$ggtt \mp 2gtSY' + SSY'Y' = \gamma\gamma rr - \gamma\gamma tt = \gamma\gamma uu.$$

Donc $gt \mp SY' = \gamma u$, ou bien $SY' = \gamma u \pm gt = ru'$.

II. Si l'on veut avoir l'angle azymuthal PZM, *Fig.* 25, on l'obtiendra par une simple analogie, & même si l'on veut, sans avoir l'angle horaire ; on l'obtiendra, dis-je, par quelqu'une de ces formules :

$$m = \frac{ry'}{c},\ n = \frac{t'x'}{r},\ N = \frac{ST'}{r}.$$

PROBLEME VIII.

Où deux astres sont vûs à une même hauteur, Fig. 26.

Ce Probleme nous arrêtera peu. Je suppose qu'on a par des Tables, ou autrement, l'arc $NF = EF \pm \frac{EE'}{\int 2}$ mesure de l'angle PQZ, & qu'on connoît encore un autre élément du triangle obliquangle ZPQ, sçavoir PQ complément de PF, outre PZ complément de la hauteur du pole. On peut donc résoudre ce triangle par la regle de trigonométrie. La regle consiste à faire $P\varphi$ perpendiculaire sur QZN, & à chercher d'abord l'angle $QP\varphi$ par cette équation : $cotang.\ QP\varphi = \frac{y' \times tang.\ NF}{r}$, puis l'angle

ΦPZ par cette autre équation : $cos. \Phi PZ = \frac{X' cos. QP\Phi}{C}$ $= \frac{X'S}{rr} cosin. QP\Phi$. La somme ou la différence des angles $QP\Phi$, ΦPZ, sera l'angle horaire du point Q, dont l'ascension droite differe de 180 degrés de celle du point F, que je suppose connue.

PROBLEME XI.

Où deux astres sont vûs dans un même vertical, & deux autres dans un autre vertical, Fig. 27.

Je nomme encore u' le cosinus de l'angle horaire du point F. Soit u'' celui de l'angle horaire du point F', Y'' la tangente de PF'; p', q', le sinus & le cosinus de l'angle FPF'. Nous avons $ru' = Y'S$, & $ru'' = Y''S$: donc $\frac{ru'}{Y'}$ $= S = \frac{ru''}{Y''}$, & $u'' = \frac{u'Y''}{Y'}$. Or, par le second Lemme de la premiere Partie $ru'' = q'u' \pm p't'$, ou ru'' $\pm q'u' = p't'$, & $rru''u'' \pm 2rqu'u'' + q'q'u'u' = p'p't't'$ $= rrp'p' - p'p'u'u'$, d'où (à cause de $p'p' + q'q' = rr$) on déduit $rru''u'' \pm 2rq'u'u'' + rr u'u' = rrp'p'$. Substituant dans cette formule les valeurs de u'' & de $u''u''$, & multipliant tout par $Y'Y'$, on a $u'u' = \frac{rrp'p'Y'Y'}{rrY'Y' \pm 2rq'Y'Y'' + rrY''Y''}$, & $u' = \frac{rp'Y'}{V(rrY'Y' \pm \&c.)}$. En reprenant l'équation $ru' = Y'S$, on a :

$$S = \frac{rrp'}{V(rrY'Y' \pm 2rq'Y'Y'' + rrY''Y'')}.$$

Si on ne trouve pas ces valeurs de u', S, assez commodes, à cause du signe radical qui s'y rencontre, voici encore une solution plus simple.

En comparant la formule qu'on vient de voir pour S,

& celle-ci $\frac{r^4aa}{Y'Y'} = rrXX \pm 2rbXX' + rrX'X'$, qu'on a vûe au Probl. VII, en comparant encore le triangle QPQ' au triangle EPE', on doit reconnoître que les deux formules sont semblables, & relatives à des lignes homologues. Y' est la tangente de PF, perpendiculaire à la base EE' du triangle EPE', menée par le sommet P de l'angle opposé à cette base, lequel a pour sinus & cosinus a, b, & est compris entre des côtés dont X, X' sont les cotangentes : de même S est la tangente de Ph, perpendiculaire à la base QQ' du triangle QPQ', menée par le sommet P de l'angle opposé à cette base, lequel a pour sinus & cosinus p', q', & est compris entre des côtés dont Y' Y'' sont les cotangentes. Ainsi, comme on a vû qu'on peut avoir PF autrement que par la valeur algébrique, de sa tangente où le signe radical se rencontre ; c'est-à-dire, qu'on peut avoir PF par deux opérations simples & subordonnées, on peut trouuer Ph par un procedé semblable.

Il faut déterminer d'abord l'angle PQQ', par sa relation avec les trois élémens donnés, qui sont l'angle QPQ', & les côtés qui le comprennent, lesquels ont x', x'', pour sinus ; c'est un cas de la quatrieme classe, & on a $p' \times$ cotang. $PQQ' \pm x'Y'' = q'y'$, d'où on déduit cotang. $PQQ' = \frac{q'y' \pm x'X''}{p'}$. L'angle PQQ', ou PQh étant connu, on a Ph par cette analogie, $r : x' :: \textit{sin.}\ PQh : S$. Enfin la hauteur du pole Ph étant connue, on aura u' par sa valeur $\frac{Y'S}{r}$.

Je ne m'arrêterai point aux Problemes XII & XIII. On s'apperçoit sans doute, que si $P\phi$ perpendiculaire sur QZN, *Fig.* 29 (dont $P\varkappa$ est complément) est connue, ainsi que PF perpendiculaire sur $ENFE'$, avec l'ascension

droite des points Φ, F, on est en état de proceder pour le Probleme XIII, de la même maniere qu'on vient de faire au Probl. XI. Je remonte au Prob. II.

PROBLEME II.

Où les hauteurs de deux astres sont données, Fig. 20, 21, 22, 23.

Je suppose l'arc EE' connu au triangle EPE', avec l'un ou l'autre des angles PEE', $PE'E$. Cela ne requiert que deux petites opérations, posé qu'on ne l'ait pas par des Tables. On a donc trois élémens du triangle obliquangle EZE', sçavoir ses trois côtés; ainsi on peut trouver l'un ou l'autre de ses angles en E, E', c'est un cas simple de la premiere classe. (Soit PEE' l'angle connu au triangle EPE', c'est l'angle ZEE' qu'il faut chercher.) On a, en conservant les dénominations employées ci-devant, $rrh' \pm r\beta h = \delta k \times cos.\, ZEE'$: d'où résulte $cos.\, ZEE' = \frac{rrh'}{\delta k} \pm \frac{r\beta}{\delta} \times \frac{h}{k}$. (Ce deuxieme terme est réductible à une expression plus simple, sçavoir au produit de la tangente de la hauteur du point E, & de la cotangente de l'arc EE' divisé par le rayon.)

Ayant ajoûté les angles connus PEE', ZEE', *Fig.* 20, 22, ou ayant retranché l'un de l'autre, *Fig.* 21, 23, on aura l'angle PEZ, & on a déja par l'hypothese deux autres élémens du triangle EPZ, sçavoir les côtés qui comprennent l'angle PEZ : la relation de ces élémens avec le troisieme côté PZ du triangle, détermine ce côté ou bien son complément, qui est la hauteur du pole; c'est un cas de la premiere classe, & on a $rrs \pm rxh = yk \times cos.\, PEZ$. La hauteur du pole étant connue, on est dans un cas de

la troisieme classe pour l'angle horaire *EPZ*, & on a $s = \frac{k\,\text{sin.}\,PEZ}{c}$.

On peut aussi changer l'ordre qui vient d'être suivi ; c'est-à-dire, trouver l'angle horaire de l'astre *E* avant la hauteur du pole, on est dans un cas de la quatrieme classe pour l'angle horaire : on a, en prenant *V* pour la cotangente de cet angle, & *H* pour la tangente de la hauteur de l'astre *E*, $V \times \text{sin.}\,PEZ + yH = x \times \text{cos.}\,PEZ$, d'où résulte $V = \frac{x \times \text{cotang.}\,PEZ}{r} \pm \frac{yH}{\text{sin.}\,PEZ}$. L'angle horaire étant découvert, on est dans un cas de la troisieme classe pour la hauteur du pole, on a, $c = \frac{k \times \text{sin.}\,PEZ}{s}$.

Si l'on souhaite avoir l'angle azymuthal, on a $m = \frac{yr}{k} = \frac{y \times \text{sin.}\,PEZ}{c}$. On peut même obtenir cet angle sans avoir l'angle horaire & la hauteur du pole ; on est pour cela dans un cas de la quatrieme classe : on a $N \times \text{sin.}\,PEZ \pm kX = h \times \text{cos.}\,PEZ$, d'où résulte $N = \frac{h \times \text{cotang.}\,PEZ}{r} \pm \frac{kX}{\text{sin.}\,PEZ}$.

Un procédé conforme en gros à celui qu'on vient de voir, a été proposé il y a quelques années par M. Pitot, de l'Académie Royale des Sciences, pour le cas particulier où l'on auroit *observé deux fois la hauteur de quelque astre, avec le tems écoulé entre les deux observations*. Voyez les Mémoires de 1736, *pag.* 255.

Notre Probleme comprend le cas où l'on aura le tems écoulé entre les observations de deux astres dans l'horison rationel. J'ai rapporté, premiere Partie, d'après M. de Maupertuis, que dans ce cas particulier la tangente *S* de *PH* hauteur du pole $= \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX \pm 2rqXX + rrXX}}$. On doit

voir que dans ce même cas *PH* se confond avec *PF*, *Fig.* 24, ainsi deux opérations simples & subordonnées y suffisent, & peuvent être substituées à celle qu'indique la formule pour la tangente *S*, &c.

Je place ici une remarque sur la méthode proposée dans ce Chapitre. Je la donne comme plus commode, comme tendante pour chaque Probleme, à des opérations arithmétiques plus simples que celles de la premiere Partie : je crois bien qu'on conviendra unanimement de ce point, qu'on approuvera par conséquent cette derniere méthode pour la pratique ; mais il me semble d'ailleurs qu'en elle-même elle a quelque valeur, qu'elle est capable de satisfaire *les esprits Géométriques*:& dois-je me flatter qu'en effet chacun en jugera aussi favorablement ? Voici donc les raisons de mon opinion.

1°. Cette derniere méthode convient dans le genre avec celle de la premiere Partie, qui a M. de Maupertuis pour Auteur, & qui est très-belle assûrément : on emploie dans celle-ci, comme dans celle-là, le calcul algébrique, le *même calcul*. Aussi les différentes formules qu'elles fournissent pour la solution du même probleme, ont-elles tant d'affinité, qu'on peut déduire l'une de l'autre, comme je l'ai montré. En un mot, ces deux méthodes roulent sur les relations qui regnent entre les élémens des triangles sphériques. Nous avons, par exemple, dans ce Probleme second quatre triangles, sçavoir *PEE'*, *ZEE'*, *PEZ*, *PE'Z*, qui, deux à deux, ont un côté commun, & trois à trois un sommet commun à leurs angles, en sorte qu'un angle quelconque est la somme ou la différence de deux autres angles. Or dans la méthode de la premiere Partie, on considere les trois angles qui ont leur sommet en *P*, on considere donc très-réellement les deux triangles *PEZ*, *PE'Z*, quoiqu'on ne les trace pas.

Dans

Dans la derniere méthode, ce sont les trois angles qui ont leur sommet en E, ou en E', que l'on considere principalement; ce sont de part & d'autre des objets de même nature.

2°. La derniere méthode n'est pas moins concise que la premiere : elle est contenue en aussi *peu de lignes*. Les quatre principales opérations subordonnées que requiert, par exemple, ce Probleme second, suivant la méthode de ce Chapitre (je compte pour les deux premieres opérations, celles qui donnent l'arc EE' & l'angle PEE'), sont indiquées par des formules qui n'occupent pas plus d'espace que le calcul qui produit l'équation du second dégré, donnée, premiere Partie, pour ce même Probleme.

3°. La derniere méthode est assez *générale* : elle s'étend à tous les cas dans lesquels celle de M. de Maupertuis peut être employée avec certain succès.

4°. Si quelque méthode a du mérite géométrique, c'est en partie à l'*analyse* que ce mérite est dû. Or, sans se prévaloir ici de l'étymologie, ne peut-on pas avancer qu'il y a autant d'analyse dans la méthode, qui, comme celle de ce Chapitre, parvient à la solution d'un Probleme en le décomposant & par degrés, que dans celle qui l'embrasse tout entier d'un seul coup, & exclusivement à tout autre objet ?

J'avoue bien qu'une solution exécutée par plusieurs équations, est communément fort inférieure en mérite à celle qui est contenue dans une seule équation : mais je ne crois pas qu'on veuille dépriser la derniere méthode, relativement à la premiere, par cette considération générale ; ce seroit en abuser, car elle suppose que les équations sont du même degré de part & d'autre. Si l'on se permettoit de former des reproches vagues, ne pourroit-on pas objecter d'un autre côté à la belle méthode de

M. de Maupertuis, qu'il eſt vicieux d'employer des équations du ſecond degré, lorſque des équations linéaires ſuffiſent, & que quoique l'algebre ſoit fort ſupérieure à la ſimple arithmétique, par l'artifice de la conſtruction & de la réſolution de ſes équations de plus d'un degré, cet artifice eſt cependant déplacé dans les rencontres où il n'eſt pas abſolument néceſſaire?

Mais enfin, peut-on dire, les ſolutions de ce Chapitre ſont *indirectes*, & ne ſont pas *immédiates*. On cherche, par exemple, pour le Probleme ſecond, un angle *PEZ* qui n'eſt point demandé. Je paſſe l'objection, mais 1°, ne peut-on point la rétorquer d'une certaine façon? Il eſt vrai qu'on va au but aſſez immédiatement dans la Partie purement algébrique de la ſolution du ſecond Probleme, que donne la premiere méthode; on part de la double formule $rrh \pm rsx = cyu$, $rrh' \pm rsx' = cy'u'$, & à l'aide d'une relation énoncée au ſecond Lemme (relation dont la deuxieme méthode n'a pas beſoin), on trouve une valeur du ſinus de la hauteur du pole; mais cette valeur n'eſt qu'algébrique, & pour obtenir la valeur numérale qui eſt demandée dans la pratique, combien d'opérations arithmétiques ne faudroit-il pas faire? Combien de produits faudroit-il former? Combien de quotiens faudroit-il chercher? &c. Que de quantités, en un mot, faudroit-il trouver, qui ne ſont pas plus demandées que l'angle *PEZ*? Ce ne feroit donc pas immédiatement, ni par une route bien directe, que l'on réſoudroit en effet le Probleme ſecond ſuivant la premiere méthode.

2°. Dans pluſieurs Problemes deux choſes ſont inconnues, ſçavoir l'heure, & la hauteur du pole (une troiſieme choſe y eſt même encore inconnue, ſçavoir l'angle azymuthal). Or ſuivant la premiere méthode, tantôt c'eſt la hauteur du pole, tantôt c'eſt l'heure qu'il faut

chercher par préalable, en forte que la folution n'eft pas immédiate pour l'une des deux (ou pour deux des trois) inconnues. Au Probleme fecond, par exemple, la folution n'eft pas immédiate pour l'heure dans la premiere méthode, la recherche de la hauteur du pole devant la précéder. Que fi on cherche par la méthode de ce Chapitre un angle PEZ qui n'eft pas demandé, ce n'eft pas fans quelque avantage, car cet angle étant une fois connu, on peut indifféremment trouver laquelle on veut des trois inconnues, l'heure, la hauteur du pole, l'angle azymuthal, indépendamment des autres.

Au refte, je ne prétends point par ces raifons aller audelà du foûtien de la deuxieme méthode, je confens qu'on donne la *préférence* à la premiere, & qu'on la juge plus élégante que toute autre.

PROBLEME XVII.

Où la hauteur d'un aftre & l'angle de fon azymuth, avec celui d'un autre aftre font donnés, Fig. 20, 21, 22, 23.

Je joins ce Probleme au précédent, parce qu'il y a beaucoup de rapport, quoiqu'il foit moins fimple. On connoît, je le fuppofe, l'arc EE', & l'angle PEE'; on a donc trois élémens du triangle EZE', fçavoir le côté EZ, complément de la hauteur de l'aftre E, le côté EE', & l'angle MZM' qui y eft oppofé, & il s'agit de trouver l'angle ZEE'. (Car de chercher la hauteur de l'aftre E', ce feroit un circuit inutile dans cette méthode. Si j'ai cherché cette hauteur, Partie premiere, c'eft que l'ufage des feules formules de M. de Maupertuis, auquel je m'étois aftreint, l'exigeoit. Au refte, il n'eft pas plus difficile de trouver l'angle ZEE', que le côté ZE' qui lui eft oppo-

sé, indépendamment l'un de l'autre.) Or pour avoir cet angle ZEE', on est dans un des cas compliqués de la quatrieme classe, & le parti le plus commode est de suivre la regle de trigonométrie, qui consiste à supposer une perpendiculaire menée du sommet E de l'angle cherché sur le côté qui lui est opposé, & à prendre successivement les angles de ZE, & de EE', avec cette perpendiculaire. L'algebre fournit les équations pour ces angles, nous avons déja vû un cas pareil au Probl. II.

L'angle ZEE' étant connu, on aura PEZ par addition ou soustraction de PEE', & l'on continuera comme au Probleme précedent.

PROBLEME XIV.

Où deux astres sont vûs dans un même vertical, & la hauteur d'un troisieme astre est connue Fig. 30.

En conservant les dénominations déja employées ci-devant, nous avons u' cosinus de l'angle horaire du point $F = \frac{Y's}{c}$, lorsque le cercle $ENE'F$ est vertical, ainsi qu'il a été montré au Probleme XI, & v cosinus de l'angle horaire de l'astre $\iota = \frac{rrh'' - r\iota\chi}{ci}$. Nommant p', q', le sinus & le cosinus de la différence des points ι, F, en ascension droite, nous avons $rv = q'u' - p'\sqrt{(rr - u'u')}$, d'où résulte $rvv - 2q'vu' + ru'u' = rp'p'$. Substituant dans cette équation les valeurs de v, u', & de leurs quarrés, multipliant tout par $ccii$, substituant $rr - ss$ à cc, &c. on trouve

$$\left.\begin{matrix} iiY'Y' \\ -2i\chi q'Y' \\ +rr\chi\chi \\ +iip'p' \end{matrix}\right\} ss \quad \left.\begin{matrix} +2rh''iq'Y' \\ -2r^3h''\chi \end{matrix}\right\} s \quad \begin{matrix} -rriip'p' \\ +r^4h''h'' \end{matrix} = 0;$$

Formule plus simple que celle qui a été donnée, premiere Partie, pour le même Probleme, sçavoir :

$$\left.\begin{array}{l} \quad rraaii \\ -2raiz(pX'-p'X) \\ +zz(rrX'X'+rrXX) \\ \qquad -2rbX'X \\ +ii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} ss \qquad \left.\begin{array}{l} +2rrah''i(p'X'-p'X) \\ -2rrh''z(rrX'X'+rrXX) \\ \qquad -2rbX'X \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} -rrii(qX'-q'X)^2 \\ +rrh''h''(rrX'X'+rrXX) \\ \qquad -2rbX'X \end{array}\right\} = 0.$$

Observons cependant en passant, que l'une de ces formules est réductible à l'autre, en substituant dans la plus longue $\frac{r^4aa}{Y'Y'}$ à sa valeur $rrX'X'+rrXX-2rbX'X$; $\frac{raq'}{Y'}$ à $pX'-p'X$, & $\left(\frac{rap'}{Y'}\right)^2$ à $(qX'-q'X)^2$, puis multipliant tout par $Y'Y'$, & divisant par $rraa$.

Comme cette solution n'est point encore assez commode, en voici une très-simple. Je suppose qu'on a par des Tables ou autrement, l'arc $E\iota$, & les angles PEE', $PE\iota$, que fait le cercle horaire du point E avec les grands cercles $ENE'F$, $E\iota$; la somme ou la différence de ces angles, est l'angle ιEZ du triangle obliquangle $EZ\iota$, dont on a, par l'hypothese, le côté $Z\iota$: on peut donc résoudre ce triangle par la regle de Trigonométrie, c'est-à-dire, trouver par parties le côté EZ, ou l'angle $E\iota Z$. (Il est presque indifférent lequel de ces élémens on ait pour satisfaire au Probleme.) Si l'on veut se servir de EZ, on cherchera 1°. le côté ER du triangle rectangle $ER\iota$, par cette équation : $tang.\ ER = \frac{tang.\ E\iota \times cos.\ \iota ER}{r}$. 2°. Le côté RZ du triangle rectangle $ZR\iota$, par cette équation : $cos.\ RZ = \frac{rh'' \times cos.\ ER}{cos.\ \iota E}$. La somme ou la différence de

ER, RZ, eſt EZ, l'un des côtés du triangle PEZ, dont on connoît d'ailleurs deux élémens, ſçavoir PE, & l'angle PEE' ou PEZ; on peut donc trouver tel autre élément qu'on voudra de ce triangle, en procédant comme au Probleme ſecond. On aura, par exemple, s coſinus de PZ, par cette équation : $rrs \pm rxh = yk \times cof.\ PEZ$; puis t ſinus de l'angle horaire EPZ du point E, par celle-ci : $ct = k \times fin.\ PEZ$: ou bien on fera $V \times fin.\ PEZ \pm yH = x \times cof.\ PEZ$, &c.

Si on veut ſe ſervir de l'angle $E\epsilon Z$, on cherchera 1°, l'angle $E\epsilon R$ du triangle rectangle $ER\epsilon$, par cette équation : $cotang.\ E\epsilon R = \frac{cof.\ E\epsilon \times tang.\ \epsilon ER}{r}$. 2°. L'angle $Z\epsilon R$ du triangle rectangle $ZR\epsilon$ par cette autre équation : $cof.\ Z\epsilon R = \frac{tang.\ \epsilon E \times cof.\ E\epsilon R}{tang.\ \epsilon Z}$; la ſomme ou la différence des angles $E\epsilon R$, $Z\epsilon R$, eſt l'angle $Z\epsilon E$, lequel étant retranché de l'angle $P\epsilon E$, que je ſuppoſe connu, ou y étant ajoûté, on a l'angle $P\epsilon Z$, compris entre deux côtés connus du triangle ϵPZ; ainſi on eſt en état de trouver la hauteur du pole par cette équation : $rrs \pm rxh'' = ik'' \times cof.\ P\epsilon Z$, &c.

Si l'on avoit par des Tables la perpendiculaire PF, ſur le cercle $ENE'F$, l'arc EF, &c., on rendroit la ſolution encore plus ſimple ; car après avoir trouvé l'arc EZ, on auroit par ſa ſouſtraction ou addition à EF, le côté ZF du triangle rectangle PFZ, & l'on obtiendroit la hauteur du pole, l'angle horaire FPZ, ou l'angle azymuthal hZM, par de ſimples analogies.

PROBLEME XV.

Où deux astres sont vûs dans un même azymuth, dont on connoît l'angle avec l'azymuth d'un troisieme astre, Fig. 30.

Si, outre l'angle donné $EZε$ ou MZM', on suppose connus comme au Probleme précédent, l'angle $εEE'$ ou $εEZ$, & le côté $εE$ du triangle obliquangle $εEZ$, on est en état de trouver par parties son côté EZ; on aura 1°, l'arc ER par cette équation : $tang.\ ER = \frac{tang.\ εE \times cos.\ εEZ}{r}$. 2°. L'arc RZ par cette autre équation : $sin.\ RZ = \frac{sin.\ ER \times tang.\ εEZ}{tang.\ EZε}$ la somme ou la différence des arcs ER, RZ, est EZ côté du triangle PEZ, où on connoît d'ailleurs deux élémens; ainsi on continuera comme au Probleme précedent.

PROBLEME XVI.

Où deux astres sont vûs à une même hauteur, & l'angle de leurs azymuths est donné, Fig. 26.

Outre l'angle EZN, moitié de l'angle donné EZE' ou MZM', je suppose connus l'angle PEE' ou PEN, & la moitié EN de l'arc EE' : on peut donc 1°. Chercher l'hypothenuse ZE du triangle rectangle ENZ par cette équation : $k = \frac{r \times sin.\ EN}{sin.\ EZN}$. 2°. L'angle ZEN du même triangle par cette autre équation : $sin.\ ZEN = \frac{r \times cos.\ EZN}{cos.\ EN}$, ou par celle-ci : $cos.\ ZEN = \frac{H \times tang.\ EN}{r}$. Cet angle ZEN étant soustrait ou ajoûté à l'angle PEN, on aura l'angle PEZ compris entre deux côtés connus du triangle EPZ, on sera donc en état de continuer comme ci-dessus.

CHAPITRE III.

Autre maniere de simplifier les calculs pour l'invention de l'heure.

CETTE maniere convient à peu de cas. Elle consiste à ajoûter une observation à celles qui suffisent absolument pour la détermination désirée ; on obtient par ce moyen, une équation plus basse en degré que celle qu'on auroit sans cela.

Soient, par exemple, deux astres vûs dans un même azymuth, & soit donné leur angle azymuthal, outre la hauteur du pole : ce sont trois choses, qui, combinées seulement deux à deux, ne donneroient point l'heure par une équation linéaire, mais jointes ensemble, elles la donnent ainsi ; car on a par la 3e formule de la premiere Partie, $\frac{Nt - su}{X} = c = \frac{Nt' - su'}{X'}$, ou $rNX't - rsX'u = rt'NX - ru'sX$. Or, par le second Lemme de la même Partie, $rt' = bt - au$, & $ru' = bu + at$, en certain cas (a, b, sont le sinus & le cosinus de la différence des astres en ascension droite), substituant ces valeurs de rt' & ru' dans l'équation précedente, on a $rNX't - bNXt + asXt = rsX'u - aNXu - bsXu$. d'où on déduit pour la tangente de l'angle horaire de l'un des astres, $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{rsX' - aNX - bsX}{rNX' - bNX + asX}\right)$.

On a un exemple d'un autre cas auquel convient cette maniere, sous le Probleme XXXI de l'Astronomie Nautique. Voici le texte de M. de Maupertuis, à peu près.

Soient

Soient h, h', h'', les (sinus de) trois hauteurs auxquelles on a observé un même astre ; soient u, u', u'', les cosinus des angles horaires ; p, p', les sinus ; q, q', les cosinus des tems écoulés entre la premiere & la deuxieme, la premiere & la troisieme observation. Par la premiere formule on a, $rrh - cyu = rsx = rrh' - cyu' = rrh'' - cyu''$, d'où l'on tire $\frac{rr(h-h')}{u-u'} = cy = \frac{rr(h-h'')}{u-u''}$, ou (faisant $h-h'=D$, $h-h''=D'$) $D'u - D'u' = Du - Du''$. Mais on a $u' = \frac{qu-pt}{r}$, $u'' = \frac{q'u-p't}{r}$, qui étant substitués dans l'équation précedente, donnent : $D'u(r-q) + D'pt = Du(r-q') + Dp't$; ou (mettant o, o', pour $r-q$, $r-q'$, sinus verses des tems écoulés) $D'ou + D'pt = Do'u + Dp't$. D'où l'on tire pour la tangente de l'angle horaire de l'astre, au moment de la premiere observation $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{Do' - D'o}{D'p - Dp'}\right)$.

Ce procedé s'étend aisément au cas où l'on a les observations des hauteurs contemporaines de trois différens astres. Soient en ce cas, x, x', x'', les sinus ; y, y', y'', les cosinus de leurs déclinaisons ; p, p', les sinus ; q, q', les cosinus de la différence d'ascension droite du premier & du second, du premier & du troisieme astre, &c. Par la premiere formule on a, $\frac{rrh - cyu}{x} = rs = \frac{rrh' - cy'u'}{x'} = \frac{rrh'' - cy''u''}{x''}$, d'où l'on tire, $rrhx' - cx'yu = rrh'x - cxy'u'$, & $rrhx'' - cx''yu = rrh''x - cxy''u''$, ou bien, $\frac{hx' - h'x}{x'yu - xy'u'} = \frac{c}{rr} = \frac{hx'' - h''x}{x''yu - xy''u''}$. Mettant D pour $hx' - h'x$, & D' pour $hx'' - h''x$, & considérant que $ru' = qu - pt$, & $ru'' = q'u - p't$, on trouve $rx'yD'u - qxy'D'u + pxy'D't = rx''yDu - q'xy''Du + p'xy''Dt$,

ou (mettant o pour $rx'y - qxy'$, & o' pour $rx''y - q'xy''$) $oD'u + pxy'D't = o'Du + p'xy''Dt$; d'où l'on tire pour la tangente de l'angle horaire du premier astre, $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{o'D - oD'}{x(py'D' - p'y''D)}\right)$, ou en remettant les valeurs de o, o', & D, D', dans le numérateur de cette fraction, $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{h(qx''y' - q'x'y'') + ry(h''x' - h'x'') + x(q'h'y'' - qh''y')}{py'D' - p'y''D}\right)$.

SCHOLIES. I. Outre la propriété de rendre le calcul plus simple jusqu'à certain point, qui se trouve dans la méthode de ce Chapitre, il est remarquable qu'elle a celle de donner le résultat de plusieurs observations, ce qui est un petit avantage, vû l'imperfection à laquelle ces opérations sont toûjours sujettes sur mer. Car plus on combine d'élémens de cette qualité, plus il est rare que leurs défauts conspirent à produire une erreur en même sens, plus souvent au contraire doivent-ils tendre à des erreurs en sens opposé, & qui s'entre-détruisent en partie.

II. Le calcul que j'ai tiré du Probleme XXXI *de l'Astronomie Nautique*, n'est qu'une préparation pour la solution de ce Probleme, que les Sçavans de l'Académie de Russie ont rendu *fameux*, Probleme *plus curieux* cependant qu'*utile*, selon M. de Maupertuis, & qui consiste à trouver la déclinaison de l'astre dont on a les trois hauteurs, & l'élevation du pole. Or en disant au commencement de ce Chapitre, que la méthode que j'y présente, consiste à ajoûter une observation à celles qui suffisent absolument pour la détermination désirée, j'ai supposé que la déclinaison étoit donnée, sans quoi je sçai que deux hauteurs d'un astre ne seroient pas suffisantes pour la détermination de l'heure. En un mot, je conviens que dans l'espece précise de ce Probleme XXXI de l'Astro-

nomie Nautique, les trois obſervations ſont abſolument néceſſaires pour l'invention de chacune des trois inconnues qu'on y détermine.

On peut faire une remarque à ce ſujet, ſur une double propriété de la combinaiſon de pluſieurs quantités Aſtronomiques, de même ou de différente eſpece, ſuppoſées données. Une de ces propriétés eſt, qu'à meſure qu'on accumule ces données, on a beſoin de connoître moins d'élémens d'une autre eſpece, & on eſt en état d'en découvrir un plus grand nombre. Si on a, par exemple, une ſeule obſervation de la hauteur d'un aſtre, il faut connoître d'ailleurs deux quelconques d'entre ces quatre choſes, la déclinaiſon de l'aſtre, ſon angle azymuthal, ſon angle horaire, & la hauteur du pole, pour trouver quelqu'une des autres : mais ſi l'on a deux obſervations de hauteur de cet aſtre, avec le tems écoulé entre ces obſervations, il ſuffit de connoître d'ailleurs un des quatre élémens que je viens de marquer, pour être en état de découvrir tout le reſte ; & ſi l'on a les obſervations de trois hauteurs de cet aſtre, avec leurs intervalles, il n'eſt pas néceſſaire d'avoir d'ailleurs aucun des quatre élémens ſuſdits, & on eſt en état de les découvrir tous par ordre.

L'autre propriété eſt, qu'en ſe ſervant des formules de M. de Maupertuis, on trouve par la combinaiſon de certaines données, une valeur algébrique plus ſimple pour quelque inconnue, que par d'autres combinaiſons. C'eſt de cette propriété que j'ai fait uſage dans ce Chapitre, & il y en a encore d'autres exemples dans la premiere Partie. Ainſi lorſqu'on a les paſſages de deux couples d'aſtres à deux verticaux, ce qui eſt le cas du Probl. XI, on a une équation d'un moindre degré pour l'invention de l'heure, que lorſqu'on a ſeulement le paſſage de deux aſtres à un

vertical, outre la hauteur du pole, ce qui eſt le cas du Probleme VII.

L'uſage qu'on peut faire de la connoiſſance de la premiere propriété, eſt de diſcerner combien de données ſont abſolument requiſes, pour la ſolution de quelque Probleme que ce ſoit du genre de ceux dont je parle. Voici, par exemple, une application de cette remarque à certaine ſolution du Probleme où il s'agit de trouver concurremment la hauteur du pole, & la déclinaiſon de quelque étoile. Quoique ce Probleme ſoit étranger à mon objet, cependant comme il eſt célebre en général, & qu'on l'eſtime même *utile pour la perfection de l'aſtronomie*, en ce que l'on y évite un *cercle* qui ſe rencontre dans la plûpart des méthodes par leſquelles on cherche la hauteur du pole, ou la déclinaiſon, je crois qu'on tolerera cette petite digreſſion.

La ſolution ou méthode que j'ai en vûe, eſt celle du Probleme XL & dernier de l'Aſtronomie Nautique. (Cette méthode qui eſt qualifiée de *très-belle* par M. de Maupertuis, & avec juſtice, parce qu'elle ne ſuppoſe *la meſure actuelle d'aucun angle* *, eſt dûe, ſuivant le même Ecrivain, à *M. Mayer*, de l'Académie de Ruſſie, à titre d'Auteur, ou d'indicateur. On y ſuppoſe ſeulement que les intervalles de tems entre les paſſages de deux étoiles par le méridien, par deux verticaux, & par deux almicantaraths inconnus, mais conſtans, ſont donnés. Or, je dis qu'une de ces obſervations eſt ſurabondante pour la ſolution du Probleme dont il s'agit, car ce ſont quatre quantités principales qui ſont données pour chaque étoile, & il n'y a auſſi que quatre inconnues principales pour chaque étoile, ſçavoir ſa hauteur & ſon angle azymuthal, au moment d'une des obſervations, outre ſa

* Voyez l'Aſtron. Naut. *pag.* 94, & ſa Préface, *pag.* xxxiij, xxxiv.

déclinaiſon & la hauteur du pole. Je dis, par exemple, qu'ayant ſeulement les tems écoulés entre les paſſages des deux étoiles au méridien & à deux autres verticaux, & à un ſeul almicantarath, toutes les inconnues que je viens de marquer ſont déterminées, & peuvent être découvertes: on n'aura pas, à la vérité une équation linéaire, pour la déclinaiſon, ainſi que dans le Probleme XL de l'Aſtronomie Nautique, mais une équation d'un plus haut degré. Voici une preuve particuliere de cette aſſertion.

Soient les ſinus, les coſinus, & les tangentes des déclinaiſons des deux étoiles x, y, X, & x', y', X'. Soient t, t', & u, u', les ſinus & coſinus des angles horaires des étoiles, lorſqu'elles paſſent au premier vertical; t'', t''', & u'', u''', les ſinus & coſinus de ces angles, lorſqu'elles paſſent au ſecond. La troiſieme formule donne, ſuivant ce qu'on a vû au Probl. VII, premiere Partie, $\frac{su - cX}{t} = N = \frac{su' - cX'}{t'}$, & $\frac{su'' - cX}{t''} = \frac{su''' - cX'}{t'''} = N'$; ou $sut' - cXt' = su't - cX't$, & $su''t''' - cXt''' = su'''t'' - cX't''$: ou $sut' - su't = cXt' - cX't$, & $su''t''' - su'''t'' = cXt''' - cX't''$; ou $\frac{Xt' - X't}{ut' - u't} = \frac{s}{c} = \frac{Xt''' - X't''}{u''t''' - u'''t''}$; ou (nommant [d'après M. de Maupertuis] a le ſinus de la différence des arcs horaires, terminés par les ſinus t & t', & a' le ſinus de la différence des arcs terminés par les ſinus t'' & t''', ce qui donne $ra = ut' - u't$, & $ra' = u''t''' - u'''t''$), on a $\frac{Xt' - X't}{ra} = \frac{s}{c} = \frac{Xt''' - X't''}{ra'}$, ou $a'Xt' - a'X't = aXt''' - aX't''$, ou $X'(a't - at'') = X(a't' - at''')$, ou faiſant la fraction $\frac{a't' - at'''}{a't - at''} = e$) $X' = eX$. Ainſi nous avons déja le rapport des tangentes des déclinaiſons déſirées.

Soient maintenant les cosinus des angles horaires des deux étoiles, lorsqu'elles passent au même almicantarath, v & v'; la premiere formule donne $cyv + rsx = rrh = cy'v' + rsx'$, ou bien $c(y'v' - yv) = s(rx - rx')$, ou (substituant Xy à rx, & $X'y'$ à rx',) $\frac{y'v' - yv}{Xy - X'y'} = \frac{s}{c} = \frac{Xt' - X't}{ra}$. Donc $rav'y' - ravy = XXt'y - XX't'y' - XX'ty + X'X'ty'$, ou $rav'y' + XX't'y' - X'X'ty' = ravy + XXt'y - XX'ty$. Donc $y' : y :: rav + X(Xt' - X't) : rav' - XX't' + X'X't$; & $y'y' : yy :: (rav + XXt' - XX't)^2 : (rav' - XX't' + X'X't)^2$. Or, on sçait que $y'y' = \frac{r^4}{rr + X'X'}$, & $yy = \frac{r^4}{rr + XX}$; donc $rr + XX : rr + X'X' :: (rav + XXt' - XX't)^2 : (rav' - XX't' + X'X't)^2$, ou (en mettant eX au lieu de X', & , au lieu de $t' - et$) $rr + XX : rr + eeXX :: (rav + {}^{\iota}XX)^2 : (rav' - e\iota XX)^2$, d'où il résultera enfin une équation du troisieme degré, pour la tangente X de la déclinaison d'une des étoiles. Cette déclinaison étant connue, on trouvera facilement la déclinaison de l'autre étoile, par l'équation $X' = eX$, puis la hauteur du pole par sa tangente $\frac{rs}{c} = \frac{Xt' - X't}{a}$. On aura ensuite, si l'on veut, le premier angle azymuthal des étoiles, par l'équation $\frac{su - cX}{t} = N$, &c.

Seroit-ce me tromper, que de regarder cette méthode comme approchante en mérite de celle de M. Mayer? Il est vrai d'un côté, qu'une équation du troisieme degré est un peu longue, & difficile à résoudre, & que le calcul pour la déclinaison seroit moins simple par cette méthode, que par celle du sçavant Académicien, laquelle aboutit seulement à une équation linéaire dans l'Astronomie Nautique : mais en récompense, la méthode qu'on

vient de voir exige une obſervation de moins que celle-là, & cette obſervation retranchée, eſt une de celles qui ſont les plus difficiles à exécuter, & où il eſt à craindre que la réfraction ne cauſe quelque défaut par ſon irrégularité. Or, *c'eſt, ce ſemble*, (au dire d'un très-habile homme) *une méthode avantageuſe que celle, qui, rejettant ſur le calcul les.... difficultés de l'Aſtronomie, en rendra la pratique* (ou bien la partie qui eſt de l'office de l'Obſervateur) *plus facile*, & moins ſujette aux vices latents que la réfraction peut y jetter. Au reſte, je laiſſe aux Maîtres de l'art à décider ſur ce point.

Une des ſuppoſitions de M. Mayer, étant ſurabondante en rigueur, il doit encore y avoir lieu à un autre procédé pour l'invention de la déclinaiſon, ſans la meſure actuelle d'aucun angle, ſçavoir en retranchant l'obſervation du paſſage des étoiles à un des verticaux, & en conſervant le reſte. Voici ce procédé, mais je le donne moins pour la pratique que pour la théorie, & pour une plus ample confirmation de ma remarque, ſur le nombre des données néceſſaires à nos Problemes Aſtronomiques. Je conviens d'ailleurs, qu'il n'y a pas grand mérite à avoir penſé à ces procédés. Comme la principale partie du calcul ſuivant ainſi que du précédent, eſt tirée de l'Aſtronomie Nautique, c'eſt à M. de Maupertuis que l'honneur en appartient.

Soient v'', v''' les coſinus des angles horaires des étoiles, lorſqu'elles paſſent au ſecond almicantarath, & le ſurplus comme ci-deſſus. On a, pour les paſſages aux deux almicantaraths, $\frac{y'v'-yv}{rx-rx'} = \frac{s}{c} = \frac{y'v'''-yv''}{rx-rx'}$, d'où réſulte $\frac{y'}{y} = \frac{v-v''}{v'-v'''}$; ou (faiſant $\frac{i}{r} = \frac{v-v''}{v'-v'''}$) $y' = \frac{iy}{r}$. Pour le paſſage au vertical, on a (en faiſant

$ra = ut' - u't$), $\frac{xy't' - x'yt}{yy'a} = \frac{s}{c} = \frac{y'v' - yv}{r(x - x')}$, ou (en substituant $\frac{iy}{r}$ à y'), $\frac{ixt' - rx't}{iay} = \frac{iyv' - ryv}{rr(x - x')}$, ou $yy(iiav' - riav) = rr(xxit' - rxx't - ixx't' + rx'x't)$. Et (en substituant $rr - yy$ à xx, & $rr - \frac{ii}{rr}yy$ à $x'x'$), $yy(iiav' - riav + rrit' + riit) - r^4(it' + rt) = -rrxx'(it' + rt)$, ou (en faisant $it' + rt = ro$, & $i(a[iv' - rv] + r[rt' + it]) = r^3\omega$), $\omega yy - rro = oxx'$, & (en quarrant chaque membre) $\omega\omega y^4 - 2rro\omega y^2 + r^4oo = ooxxx'x' = oo(r^4 - rryy - iiyy + \frac{ii}{rr}y^4)$.



TROISIEME

TROISIEME PARTIE.

Du choix entre les manieres de trouver l'heure, & des moyens de faire les observations supposées.

SI toutes les observations étoient parfaitement exactes, toutes les voies différentes qui constituent les divers Problemes proposés ci-devant sur l'invention de l'heure, seroient également bonnes, & il seroit d'ailleurs indifférent quelle fût la situation de l'astre, ou des astres, dont les observations sont supposées pour chaque Probleme. Mais il n'est que trop certain que l'*on se trompe toûjours de quelque chose* en observant à la mer; *& les mêmes erreurs commises dans les observations dont on a besoin, & qu'on prend pour fondement du calcul, ou d'une opération graphique, mettent, par leur différente complication*, ou par la diversité des circonstances, *une grande différence* entre les résultats de la même méthode, & peuvent en mettre aussi entre ceux des différentes méthodes ou Problemes. Il y a donc un choix à faire à cet égard entre les différentes circonstances, où une même méthode peut absolument être employée, & un autre choix entre les différentes méthodes. C'est même presque par ce seul égard que l'on doit déterminer quelle est la meilleure maniere de trouver l'heure en mer, selon le désir de l'Académie, car la facilité des opérations * est peu de chose, en comparaison

* Ce n'est pas la facilité respective des opérations de divers genres, telles que le calcul & la formation d'une figure, qui peuvent servir à un même Probleme, dont j'entends parler, c'est de celle des opérations homogenes qui conviennent aux divers Problemes, ou en différentes rencontres.

de l'exactitude à laquelle il faut toûjours tendre, afin d'en approcher le plus qu'il est possible, quand on ne sçauroit l'obtenir ; & d'ailleurs, les opérations les plus faciles répondent communément aux cas où les erreurs des observations sont les moins nuisibles. Ainsi, pour diriger le choix qu'il convient de faire, il faut *examiner dans quelles rencontres les erreurs des observations tirent moins à conséquence*, & il est bon de sçavoir comment on peut évaluer leur effet, une telle évaluation étant utile au Navigateur, pour connoître jusqu'où il peut compter sur le résultat de ses observations, dans le cas où il n'aura pas la commodité de faire celles qui sont les plus avantageuses, ni de choisir les circonstances les plus favorables.



CHAPITRE PREMIER.

Du choix que l'on doit faire entre différentes applications de la même méthode, ou détermination des circonstances dans lesquelles une observation quelconque doit être faite, afin que son erreur tire moins à conséquence pour l'invention de l'heure.

MR. Bouguer, dont j'ai emprunté ci-dessus quelques expressions, a bien fait sentir la nécessité d'une détermination pareille à celle dont il s'agit, il nous a découvert une maniere d'y procéder, & nous en a laissé un beau modele dans la troisieme Partie de son excellente Piece déja citée, touchant la méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole. Il y fait usage pour cela du calcul différentiel: je me servirai aussi du même moyen, ou pour mieux dire, je ne le négligerai pas, car j'en employerai un autre en premier lieu, afin d'abréger. L'usage de la seule maniere inventée par M. Bouguer, produiroit ici trop de prolixité, à cause de la multitude & de la nature des Problemes que j'ai embrassés ci-devant, puisque cet habile Géometre a été obligé de faire plusieurs articles, pour appliquer sa méthode à l'unique, & assez simple Probleme, où l'angle azymuthal d'un astre est conclu de l'observation de sa hauteur, & de la supposition que celle du pole est connue exactement, ou à peu près. D'ailleurs ce moyen que je vais employer d'abord, sera intelligible à plus de personnes que le calcul différentiel.

La recherche de l'heure pouvant être souvent jointe, & allant pour ainsi dire de pair avec celle de la hauteur

du pole, je déterminerai conjointement, quelles sont les circonstances les plus favorables pour l'invention de l'une & de l'autre chose, quoique la derniere ne soit pas de mon objet. Je ne pourrois même séparer ces choses sans inconvénient, certaine opposition qui est entre elles, servant à faire mieux entendre ce qui convient en particulier à l'une ou à l'autre.

L'angle horaire de toute étoile ou de tout point du ciel, est une chose qui change continuellement, uniformément, & assez rapidement, par l'effet du mouvement journalier : au contraire la hauteur du pole, c'est-à-dire, du centre de ce mouvement, est une chose fixe pour chaque point de la terre. C'est sur ces propriétés opposées, que je vais déterminer en général quelle doit être la position d'un astre, ou quelles doivent être les positions de plusieurs astres, pour donner l'une ou l'autre de ces choses, avec le moins d'erreur qu'il est possible. On peut déja entrevoir, & j'annonce, que l'observation qui est favorable pour l'une, est désavantageuse ou peu utile pour l'autre.

Le mouvement journalier, comme je l'ai remarqué dans la premiere Partie, fait que les astres changent continuellement, tant d'azymuth que d'almicantarath : mais ces changemens, & ceux qui en dépendent, sont différens à certain égard de ceux de l'angle horaire. Ils sont sujets à variété ; car tantôt ils sont grands & prompts, tantôt ils sont lents & petits, & presque insensibles. Il y a telle situation de la sphere, où l'angle azymuthal d'un astre change moins que sa hauteur ; telle autre où c'est sa hauteur qui change moins que son angle azymuthal. Une de ces choses peut changer autrement pour un astre voisin du pole, que pour un astre qui en est plus éloigné. Il y a telle partie du cours de chaque astre, où c'est sa hauteur qui

change peu ; & telle autre où c'est son angle azymuthal qui reçoit le moindre changement, &c.

Je considere d'abord le cas où l'une de ces choses, l'heure, & la hauteur du pole, est connue, soit exactement, soit à peu près, ou bien n'est pas désirée, & où l'on cherche seulement l'autre : & je dis que pour connoître le plus exactement qu'il se peut la hauteur du pole, qui est une chose fixe, il faut observer un ou deux élémens quelconques, du nombre de ceux qui ont été supposés dans les divers Problemes ci-dessus, dans la circonstance où ils changent le moins ; & qu'au contraire, pour trouver le plus correctement l'heure, qui est une chose changeante, il faut observer un ou deux de ces élémens quelconques, dans la circonstance où ils changent le plus, posé qu'ils ne soient pas trop difficiles à observer alors. Je dis que plus un de ces élémens approchera de l'état fixe au moment où il sera observé, plus sûrement il donnera la hauteur du pole, & plus vicieusement il donneroit l'heure ; c'est-à-dire que l'erreur que l'on commettra dans l'observation de cet élément, ne produira qu'une erreur égale, ou de peu plus grande sur la conclusion de la hauteur du pole dans plusieurs Problemes, & qu'elle en produiroit une beaucoup plus grande sur la conclusion de l'angle horaire. Je dis d'un autre côté, que plus un élément approchera de la rapidité & de l'uniformité de la variation de l'angle horaire par la sienne, au moment où il sera observé ; plus sûrement il donnera cet angle, & plus défectueusement il donneroit la hauteur du pole, sauf quelques exceptions ; c'est-à-dire, que l'erreur qui découlera dans la détermination de l'heure, de celle de l'observation d'un tel élément, ne sera pas plus grande, ou de peu plus grande que celle de son principe, & que celle qui en résulteroit sur la hauteur du pole, l'excéderoit de beaucoup pour l'ordinaire.

Entrons donc un peu en détail, sur les changemens auxquels les élémens que j'ai supposés donnés dans les Problemes des Parties précédentes sont sujets, selon que l'astre est, ou que les astres sont dans telle ou telle partie de leur cours, qu'ils ont plus ou moins de déclinaison, & que le pole est plus ou moins élevé. On verra dans ce détail, un commencement de preuve de mes propositions.

La sphere étant parallele, ou presque parallele, la hauteur des astres ne varie point, ou varie très-peu; ainsi leur déclinaison étant supposée donnée, l'observation de la hauteur d'un astre quelconque, ou des hauteurs de deux astres, donneroit la hauteur du pole avec autant d'exactitude qu'elle en auroit: mais il est visible que cette observation ne donneroit point l'heure, quand même il s'en faudroit de 9 ou 10 minutes que le pole ne fût au zénith, puisqu'en se trompant d'autant de minutes sur la hauteur de l'astre observé, on pourroit se tromper du quart-de-cercle entier sur son angle horaire, en le mettant, par exemple, au méridien, lorsqu'il seroit au cercle de six heures, ou à ce cercle, lorsqu'il seroit au méridien.

Au contraire, l'angle azymuthal de tous les astres, ou de presque tous, change beaucoup dans cette situation de la sphere, & il change également, ou presque également à l'angle horaire. Aussi l'observation de cet élément donneroit l'heure avec autant d'exactitude qu'elle en auroit; mais elle ne donneroit point, ou donneroit mal, la hauteur du pole, surtout lorsque l'astre ne seroit pas fort élevé, & fort voisin du premier vertical, qui, dans ce cas, est presque co-incident avec le cercle de six heures.

La sphere étant droite, ou presque droite, les circonstances qu'on vient de voir sont renversées, & il s'en trouve

de nouvelles. Les astres varient beaucoup en hauteur, & le plus qu'il est possible, & avec le plus d'uniformité, quant à chacun, mais ils en varient diversement entre eux : au contraire, ils changent peu d'angle azymuthal pour la plûpart, & ils en changent diversement en tems égaux. Tout cela a besoin d'être développé. A l'égard du changement de hauteur, voici d'abord une regle générale, c'est que pour les astres qui passent entre le pole élevé & le zénith, ou bien entre le pole abbaissé & le nadir, ce changement total, c'est-à-dire, celui qui se fait entre la *culmination* de l'astre, & sa plus grande dépression, est égal au double du complément de la déclinaison de l'astre. Pour tous les autres astres, c'est-à-dire, ceux dont la déclinaison est moindre que la hauteur du pole, leur changement total en hauteur, est égal au double du complément de la hauteur polaire. Et quant à l'angle azymuthal, c'est aussi une regle générale, que l'azymuth des astres qui sont dans le premier cas, ne parcourt qu'une partie de l'horison, & une partie d'autant moindre, que leur déclinaison surpasse plus la hauteur du pole : d'ailleurs cet azymuth va tantôt en un sens, tantôt en un autre. Au contraire, l'azymuth des astres qui sont dans le second cas, avance toûjours en même sens, & parcourt tout l'horison en 24 heures : ainsi la variation totale de leur angle azymuthal, est égale à celle de l'angle horaire, mais elle est tantôt plus lente, & tantôt plus prompte.

Revenons à notre hypothese. La sphere étant droite, ou presque droite, la hauteur d'un astre situé à l'équateur, qui, dans ce cas, est presque co-incident avec le premier vertical, change autant, ou presque autant que l'angle horaire, & toûjours uniformément, ou il s'en faut très-peu. Il est encore visible que par l'observation de cet élément, on auroit l'heure aussi exactement que cet

élément même. Au contraire, une telle obſervation ne donneroit point, ou donneroit mal la hauteur du pole, ſi ce n'eſt que l'aſtre fût fort élevé. Quant aux aſtres qui déclinent de l'équateur, ils varient d'autant moins en hauteur, qu'ils ont plus de déclinaiſon, & ils en varient peu ſenſiblement vers le tems de leur culmination; ainſi leur hauteur étant obſervée dans cette circonſtance, donneroit aſſez exactement la hauteur du pole.

Dans la même hypotheſe de la ſphere droite, ou preſque droite, les aſtres ſe meuvent perpendiculairement, ou preſque perpendiculairement à l'horiſon, lorſqu'*ils* ſe levent ou ſe couchent; ainſi leur angle azymuthal ne change point dans cette circonſtance, & il eſt aſſez propre à donner la hauteur du pole. Cet angle change le plus vers le tems de la culmination de l'aſtre, lorſque ſon cours eſt preſque parallele à l'horiſon, & ce changement eſt d'autant plus grand & plus prompt, que l'aſtre paſſe plus près du zénith, ou bien décline moins de l'équateur, mais il eſt lent, lorſque l'aſtre eſt voiſin du pole. L'angle azymuthal change médiocrement pour la *plûpart* des aſtres, entre ces extrémités du paſſage à l'horiſon, & *du* paſſage au méridien. La ſphere étant parfaitement droite, un aſtre ſitué à l'équateur ne change point d'azymuth entre ſes paſſages au méridien, & à ces paſſages, il en change diamétralement tout d'un coup. Tout aſtre qui paſſe pareillement au zénith, lorſque la ſphere n'eſt pas droite, change diamétralement d'azymuth à ce paſſage.

La ſphere étant oblique, les changemens de la hauteur & de l'angle azymuthal des aſtres, participent aux états oppoſés qu'on vient de voir dans les deux hypotheſes précédentes. Ils ne ſont la plûpart, ni ſi grands, ni ſi petits; ni ſi rapides, ni ſi lents; ni ſi inégaux, ni ſi approchans de l'égalité, ou bien s'ils ſont ſuſceptibles de quelques-uns de

de ces états; c'est dans une moindre partie de leur cours. Au reste, il est commun à cette hypothese & aux précédentes, que plus un astre est voisin du méridien, moins il change de hauteur à chaque instant, & que plus il est éloigné de ce cercle, plus par conséquent il en change. Or ce plus grand éloignement du méridien a lieu, quant aux astres dont la déclinaison est moindre que la hauteur du pole, à leur passage au premier vertical. Quant aux astres dont la déclinaison surpasse la hauteur du pole, on sçait qu'ils ne passent point au premier vertical, ou bien que leur plus grande digression du méridien est moindre que 90 degrés, & inégale. L'angle azymuthal varie au rebours de la hauteur; il change le plus, lorsque la hauteur change le moins, & au contraire il change le moins, lorsque la hauteur change le plus. C'est donc toûjours vers le tems du passage d'un astre au méridien, que son angle azymuthal change le plus, & vers le tems de son passage au premier vertical (posé qu'il y passe) que cet angle change le moins. Pour les astres qui ne passent point au premier vertical, il est visible qu'il y a quelque partie de leur cours où ils se meuvent perpendiculairement à l'horison, comme je l'ai déja observé, & qu'alors leur angle azymuthal ne varie pas.

Plus un astre est éloigné du méridien, ai-je dit, plus il change de hauteur. Il est à propos d'ajoûter, & il est très-aisé de voir, que ce plus grand changement instantané, est moindre que celui de l'angle horaire, lorsque la sphere est oblique, & d'autant plus petit qu'elle est plus oblique. (Cela doit être en effet, puisque le changement total d'un astre en hauteur pendant 12 heures, est tout au plus égal au double du complément de la hauteur du pole). Il suit donc du principe que j'ai posé, que pour découvrir l'heure par l'observation de la hauteur de quelque astre, il faut

la prendre lorſqu'il eſt le plus éloigné du méridien; mais que dans cette circonſtance, qui eſt la plus favorable à l'invention de l'heure, on a moins d'avantage pour la *découvrir* lorſque la ſphere eſt oblique, que lorſqu'elle eſt droite, & à proportion qu'elle eſt plus oblique; & c'eſt ce que je prouverai rigoureuſement dans la ſuite par le calcul. On doit donc regarder comme certain mon principe général, ſçavoir, qu'à meſure que la variation d'un élément eſt moindre que celle de l'angle horaire, il réſulte une plus grande erreur dans la détermination de l'heure, que celle qu'on peut commettre dans l'obſervation de cet élément, &c.

Pour l'angle azymuthal, celui de quelques aſtres varie autant, ou plus, que l'angle horaire, vers le tems du paſſage de ces aſtres au méridien, dans le même cas de la ſphere oblique: mais cet angle ne peut pas être obſervé directement ſur mer, parce qu'une telle obſervation requiert une ligne méridienne; & d'ailleurs, quand bien on auroit cette ligne ſur mer, il ſeroit encore difficile d'y prendre directement l'azymuth d'un aſtre, *vers le tems* où cet azymuth varie le plus, parce que c'eſt alors que l'aſtre eſt le plus élevé, &c.

A l'égard de l'invention de la hauteur du pole, on voit ſans doute que dans le même cas de la ſphere oblique, il y a des circonſtances qui y ſont auſſi favorables que dans tout autre cas, puiſque le changement de hauteur eſt inſenſible pour la plûpart des aſtres à leur paſſage au méridien, & que le changement d'angle azymuthal eſt pareillement inſenſible pour quelques aſtres, en certaine partie de leur cours. On doit voir auſſi, que la circonſtance la plus déſavantageuſe dans le même cas, pour trouver la hauteur du pole par l'obſervation de celle d'un aſtre, ou de celles de deux aſtres, eſt lorſque cet aſtre, ou ces aſtres

sont voisins du premier vertical. On peut juger sur cela, des *restrictions* qu'exigent *dans l'usage*, les Problemes XXXVIII & XXXIX de l'Astronomie Nautique, qui consistent à trouver sur mer la hauteur du pole, soit par la durée du jour, soit par le tems écoulé entre le lever ou le coucher de deux Planetes.

Il me reste à remarquer touchant la hauteur, & l'on peut aisément reconnoître à l'inspection d'un globe, que la variation instantanée de cet élément, est la même pour tous les astres qui sont dans le même azymuth, ou dans des azymuths également éloignés du premier vertical, quelques soient la hauteur & la déclinaison de ces astres, parce que ceux qui font plus de chemin, le font plus obliquement. On peut conclurre de-là, que la plus grande variation de hauteur des astres qui ne passent pas au premier vertical, est moindre que celle des astres qui y passent. (On peut aussi tirer la même conclusion de ce que la variation totale de hauteur de ceux-là est moindre que la variation totale de hauteur de ceux-ci.) Ainsi pour déterminer l'heure par la hauteur d'un astre, c'est quelqu'un de ceux dont la déclinaison est moindre que la hauteur du pole, & du côté du pole élevé, qu'il faut observer préférablement à ceux d'une condition différente, &c.

Le détail des propositions où je viens d'entrer touchant les changemens divers de la hauteur, & de l'angle azymuthal des astres, ne regarde pas seulement l'usage qu'on peut faire de ces élémens, il tend encore à montrer en quelles circonstances les variations des autres élémens propres à donner l'heure, & la hauteur du pole, sont moindres ou plus grandes : mais avant que de passer à cette exposition, je m'arrête pour confirmer par le calcul, plusieurs des propositions précédentes.

Nous avons par la premiere formule, $rrh \pm rsx = cyu$,

& en prenant la petite variation, la hauteur du pole ainsi que la déclinaison de l'astre étant supposées précises, $rrdh = cydu$. Donc en nommant dH la petite variation instantanée de la hauteur (d'où résulte $dh = \frac{kdH}{r}$), & dE le petit arc de l'équateur qui mesure la variation de l'angle horaire correspondante à dH, (d'où résulte $du = \frac{tdE}{r}$), on a $rrkdH = cytdE$.

Donc 1°. dH est zéro lorsque t est zéro, c'est-à-dire, lorsque l'astre passe au méridien.

2°. dH est un *maximum*, lorsque sa différence ddH est égale à zéro. Or, dH étant $= \frac{cyt}{rrk} dE$, $ddH = (kdt - tdk) \frac{cy}{rrkk} dE$ lorsque dE est constante. Faisant donc $kdt - tdk = 0$, substituant $\frac{hdH}{r}$ à dk, & $\frac{udE}{r}$ à dt, ce qui donne $kudE - htdH = 0$, ou bien $rrkku - chtty = 0$, parce que $dH = \frac{cyt}{rrk} dE$; mettant ensuite $rr - hh$ pour kk, & $rr - uu$ pour tt, multipliant tout par cy, puis mettant pour cyu sa valeur $rrh - rsx$, &c. on trouve enfin $hhsx - rhxx - rhss + rrsx = 0$. Or cette équation est divisible par ces deux-ci : $hs - rx = 0$, $hx - rs = 0$. Nous avons déja vû la deuxieme, elle indique la partie du cours d'un astre, dont la déclinaison excede la hauteur du pole, où cet astre est à sa plus grande digression du méridien : la premiere marque la hauteur d'un astre à son passage au premier vertical ; car en faisant $n = 0$, dans la deuxieme formule du premier Lemme, qui est $rrx + nck = rsh$, l'on trouve aussi $rx = hs$.

3°. On peut découvrir en général, indépendamment du calcul de l'article précédent, que plus un astre est

éloigné du méridien par son azymuth, plus la variation instantanée de sa hauteur est considérable. Il suffit pour cela de substituer à yt, dans l'équation $rrkdH = cytdE$, sa valeur mk, prise de la cinquieme formule du premier Lemme; car on aura $dH = \frac{cm}{rr} dE$: & il est visible que plus m, sinus de l'angle azymuthal, sera grand, plus aussi le sera la variation dH. On voit d'ailleurs par la même expression, que la plus grande variation dH est moindre que dE, lorsque la sphere est oblique, dans la proportion du cosinus de la hauteur du pole au sinus total.

Reprenons la premiere formule, & supposons maintenant de l'erreur tant sur la hauteur de l'astre, que sur celle du pole, ce qui rend h, s, c, u, variables, pendant que x, y, demeurent constantes; nous aurons $rrdh - rxds = cydu + yudc$, & (mettant pour les différences du sinus & du cosinus de la hauteur du pole le petit arc du méridien $dL = \pm \frac{rds}{c} = \pm \frac{rdc}{s}$ &c.) $cytdE = cmkdE = rrkdH \mp rxcdL \pm syudL$; & (mettant pour syu sa valeur $\frac{rrhs - rxss}{c}$, tirée de la premiere formule, puis rx sa valeur $\frac{rsh \mp nck}{r}$, tirée de la deuxieme formule, ce qui rend 1°. $syu = \frac{rhs(rr - ss) \pm nckss}{rc} = \frac{rhsc \pm nkss}{r}$, 2°. $rxc = \frac{rhsc \mp nkcc}{r}$); $rcmkdE = r^3kdH + nkdL(\pm cc \pm ss)$, ou $cmdE = rrdH \pm rndL$.

Donc 1°. si $m = r$, ce qui rend $n = 0$, c'est-à-dire, si l'on a pris la hauteur de l'astre à son passage au premier vertical, l'erreur dE qui se trouve dans la détermination de l'angle horaire, est la plus petite qu'il est possible de commettre en évitant le hasard; & l'erreur sur la hauteur du pole est sans conséquence pour cette détermination,

puiſque l'on a $dE = \frac{r}{c}\, dH$.* (Cependant cette moindre erreur qui réſulte ſur l'angle horaire de celle qu'on a commiſe ſur la hauteur de l'aſtre, eſt plus grande que celle-ci, lorſque la ſphere eſt oblique, ainſi que je l'ai déja dit, conformément au principe général.) Et ſi l'aſtre eſt fort voiſin du premier vertical lorſqu'on prend ſa hauteur, ce qui rend n fort petit, l'erreur ſur la hauteur du pole eſt de petite conſéquence dans la détermination de l'angle horaire.

Donc 2°. lorſqu'on peut obſerver la hauteur d'un aſtre à ſon paſſage au premier vertical, ou lorſqu'il eſt fort près de ce cercle; & que l'on connoît d'ailleurs à peu près la hauteur du pole, ne fût-ce que par l'eſtime pratiquée à la mer, une ſeule obſervation ſuffit pour la détermination de l'heure, & l'on peut ſe ſervir du Probleme V. ci-deſſus. Et ſi l'on étoit dans le cas de ne pas connoître la hauteur du pole, ou de ne la connoître que très-groſſierement, & qu'on voulût découvrir l'heure, ſans déterminer plus préciſément cette hauteur, il ne faut pas craindre de faire les deux obſervations des hauteurs d'un ou de deux aſtres, leſquelles conviennent à ce cas, ſelon le Probleme ſecond, de faire, dis-je, ces deux obſervations dans les circonſtances où elles donneroient le plus mal la hauteur du pole, puiſque le défaut de ces obſervations à l'égard de la hauteur du pole, eſt alors indifférent à la détermination de l'heure. Bien loin même d'éviter ces circonſtances, ce ſont celles qu'il faut préférer & joindre enſemble; je veux dire, qu'il eſt à propos pour la détermination de

* Je dis *en évitant le haſard*, car abſolument parlant, dE peut être moindre que $\frac{r}{c}\, dH$, & peut même être zéro, lorſque les termes $rrdH$ & $rndL$ ont des ſignes contraires. Mais c'eſt un haſard que l'on auroit tort de tenter, en prenant volontairement un aſtre à quelque diſtance du premier vertical, puiſque l'on s'expoſeroit également par-là, au danger d'avoir les deux termes de la valeur de dE affectés de ſignes ſemblables.

l'heure seule, dans le cas du Probleme second, d'observer deux astres les plus voisins du premier vertical, soit de même côté, soit de différens côtés du méridien; car l'erreur dE qui se trouvera dans la détermination de l'heure en suivant cette pratique, pourra être zéro, si les deux erreurs dH, dH', sont en sens contraires, elle sera au plus égale à la moitié de $\frac{r}{c}\, dH + \frac{r}{c}\, dH'$, posé que les deux astres soient précisément au premier vertical, & communément $\frac{e}{r}\, dE$ sera environ la moitié de la plus grande erreur dH, à laquelle on est sujet en prenant la hauteur d'un astre, erreur que M. Bouguer, déja cité sur ce point, estime de 15 minutes de degré.

Par la raison des contraires, on doit dire (on le sçait même assez sans cela, & il est inutile de le prouver directement par le calcul) que pour trouver seulement la hauteur du pole dans le cas du Probleme second, il faut observer les deux hauteurs lorsque les deux astres sont le plus voisins du méridien, circonstances qui sont les plus désavantageuses pour la détermination de l'heure. Cette remarque paroît peut-être superflue: mais je la fais moins pour elle-même, que pour fortifier l'induction que je tire de la précédente, en faveur de cette maxime générale, sçavoir que *soit qu'on cherche seulement la hauteur du pole, soit qu'on cherche seulement l'heure, & par quelques élémens qu'on veuille chercher l'une de ces choses, dans les Problemes du premier & du troisieme Chapitre de la premiere Partie, il faut toûjours choisir les deux circonstances les plus favorables, en particulier à l'invention de la chose désirée, quoiqu'elles soient les plus désavantageuses à la détermination qu'on pourroit faire de l'autre chose, concurremment avec celle-là.* Si on veut trouver seulement l'heure, par exemple, par l'observation des passages de deux couples d'astres à deux ver-

ticaux, ce qui est le cas du Probleme XI, Probleme qui fournit concurremment la hauteur du pole; on peut, & il est même à propos, de préférer les deux circonstances qui donneroient le plus mal cette hauteur, *& vice versa*, &c. C'est des qualités de cet élément employé au Probl. XI[e], & de celui qui sert au Probleme suivant, qu'il me reste à parler.

Observer deux astres à leur passage à un même vertical, c'est les saisir lorsque la différence de leurs angles azymuthaux est zéro, ou à peu près, ou bien lorsque l'angle du grand cercle *ENE'F*, qui passe par ces astres avec le vertical *MZ* de l'un des deux est aussi zéro, ou à peu près, *Fig.* 25, 27, &c. Observer deux astres à leur passage à un même almicantarath, c'est les saisir lorsque leur différence de hauteur est nulle ou à peu près, ou bien lorsque l'angle du grand cercle *ENE'F*, qui passe par ces astres avec le vertical *μZN*, qui en est équidistant, est droit ou à peu près, *Fig.* 26, 28. La différence des angles azymuthaux de deux astres, & la différence de leurs hauteurs, ou bien les angles du grand cercle sur lequel sont situés deux astres avec certains verticaux, sont donc les élémens de la variation, desquels il s'agit de déterminer l'état vers le tems où ces élémens servent à nos Problemes.

Quant à la différence des hauteurs de deux astres, il est manifeste 1°, que sa variation est nulle lorsque les hauteurs croissent ou décroissent ensemble, & qu'elles reçoivent un changement égal; & que cette variation est petite, lorsque les hauteurs reçoivent des changemens presque égaux. Ainsi, comme nous avons vû que les changemens de hauteur de deux astres également éloignés du premier vertical par leurs azymuths sont égaux, & que ces changemens sont d'ailleurs en même sens, lorsque les deux astres sont de même part du méridien, il s'ensuit que la

la variation de l'élément en question est nulle; ou peu considérable, lorsque le vertical μZN, qui est équidistant des deux astres E, E', *Fig.* 26, 28, &c. & perpendiculaire, ou à peu près perpendiculaire au grand cercle $ENE'F$, sur lequel sont ces astres, n'est pas différent du premier vertical, ou en est peu éloigné.

2°. Il n'y a pour certains astres qu'un tems très-court, où la variation $dH - dH'$ de la différence de leur hauteur puisse être nulle sensiblement. Ce tems est assez long pour d'autres astres: un peu avant ou après ces tems, la variation instantanée $dH - dH'$ de deux des premiers est plus grande, que la variation pareille de deux des seconds, quoique la variation totale $H - H'$ dont ceux-là sont capables, soit moindre que la variation totale de ceux-ci, en sorte que le rapport de la variation instantanée à la variation totale, est bien plus grand alors pour ceux-là que pour ceux-ci; & les astres qui sont fort voisins du 1er vertical, sont ceux de la premiere condition, & ceux qui sont fort voisins du méridien sont ceux de la seconde; car il résulte de ce qui a été dit ci-dessus, que la variation dH va en croissant pour les astres qui sont situés du côté du premier vertical, où est le pole élevé, lorsqu'ils s'approchent de ce cercle, & la variation dH' va toûjours en diminuant pour les astres qui sont de l'autre côté du premier vertical: ainsi avant ou après l'instant où dH est précisément égale à dH', $dH - dH'$ est d'autant moins petite que chacune de ces quantités a une plus grande variation ddH, ddH'; & c'est ce qui arrive lorsque les astres sont voisins du premier vertical: au contraire $dH - dH'$ est d'autant plus petite, que chacune de ces quantités a une plus petite variation, & c'est ce qui arrive lorsque les astres sont voisins du méridien, &c.

3°. Il est encore visible que si les deux astres situés à

peu près dans le même almicantarath, étoient de même part du premier vertical, la variation $dH - dH'$ de leur différence de hauteur, quand même elle se trouveroit petite, * ne seroit pas la plus petite dont cet élément est susceptible, & que le tems de la rencontre supposée de ces astres à un même almicantarath, est assez éloigné du tems où leur variation $dH - dH'$ est effectivement la plus petite.

Il résulte de tout cela, & du principe posé ci-dessus, que ce sont deux astres situés de différens côtés du premier vertical, de même part du méridien, & les plus proches qu'il est possible de ce dernier cercle, qu'il faut choisir pour découvrir le plus sûrement la hauteur du pole, par l'observation du passage de ces astres à un même almicantarath.

On seroit parvenu à la même conclusion, en considérant la variation de l'angle du grand cercle $ENE'F$, sur lequel deux astres sont placés, & du vertical $Z\mu N$, équidistant de ces astres, *Fig.* 26, 28, &c. car la variation de cet élément est d'autant plus petite, que les points E, E', varient moins en hauteur, & qu'ils sont plus éloignés du point mitoyen N, &c.

D'un autre côté, la variation $dH - dH'$ de la différence de hauteur de deux astres, ne sçauroit être plus grande que quand l'une des hauteurs croît pendant que l'autre décroît; & quand chacune de ces quantités dH & dH' est la plus grande qu'il est possible. Ainsi pour déterminer le plus sûrement l'heure, par l'observation de deux astres dans un même almicantarath, il faut en choisir deux qui soient de différens côtés du méridien, & le plus voisins qu'il se pourra du premier vertical: mais cela ne suffit pas, il faut encore que ces astres soient de même

* (C'est ce qui auroit lieu, si les astres étoient fort voisins.)

part du premier vertical, plutôt que de différens côtés de ce cercle, parce que la variation $dH-dH'$ a un plus grand rapport à la variation totale $H-H'$ dans le premier cas que dans le second. Il est donc avantageux pour la détermination de l'heure, par l'élément dont il s'agit, que le vertical μZN, qui est équidistant des deux astres, & perpendiculaire ou à peu près, au grand cercle $ENE'F$ où ils sont, soit co-incident avec le méridien, ou en soit peu éloigné. Et c'est aussi ce que demande l'opposition d'entre la détermination de la hauteur du pole & celle de l'heure, puisque nous avons vû qu'il convenoit à celle-là, que le cercle μZN fût co-incident avec le premier vertical, ou en fût peu éloigné.

Cette proposition que je viens d'avancer touchant la détermination de l'heure, sçavoir qu'il est à propos que les deux astres observés dans un même almicantarath, soient de même côté plutôt que de différens côtés du premier vertical, peut être confirmée par la considération de la variation de l'angle du grand cercle $ENE'F$, où sont les astres avec le vertical μZN, équidistant de ces astres: car cette variation est d'autant plus grande, le reste étant égal, que les points E, E', sont moins éloignés du point mitoyen N. Or, en supposant deux astres E, E', situés de divers côtés du méridien, & de même part du 1er vertical, & un troisieme astre E'' d'autre part de ce cercle, & à la même distance qu'en est E', ce qui rend égales les variations dH', dH'' des hauteurs des astres E', E''; il est évident que les astres E, E', sont moins éloignés de leur point mitoyen, que les astres E', E'' ne le sont du leur; donc, &c. Mais si les astres sont de même côté du premier vertical, & peu élevés, plus ils seront éloignés l'un de l'autre, & voisins par conséquent du premier vertical, plus ils seront propres, comme je l'ai déja dit, à la déter-

mination de l'heure, parce que la variation de l'angle des cercles μNZ, $ENE'F$ augmentera plus par le plus grand changement des points E, E' en hauteur, qu'elle ne diminuera par le plus grand éloignement de ces points.

Il suit de la même considération, que si l'on n'est pas exposé à une plus grande erreur, en croyant observer deux astres dans un même almicantarath lorsque ces astres sont élevés, que lorsqu'ils sont bas; il vaudra mieux choisir des astres qui soient dans le premier cas, que d'en prendre qui soient dans le second, le reste étant égal; car plus les astres sont élevés, plus ils sont voisins. Mais il ne faut pas abuser de cette considération, & vouloir pousser l'avantage dont il s'agit, jusqu'à prendre des astres très-élevés, & par conséquent très-voisins, parce que le premier vertical n'étant pas exactement connu sur mer, sur-tout avant qu'on sçache l'heure, on s'exposeroit par-là à l'inconvénient que ces astres fussent trop écartés de ce grand cercle par leur azymuth, & que la variation de leur hauteur fût par conséquent alors trop petite, &c.

A l'égard de la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux de deux astres, différence présumée $= 0$, lorsqu'on croit saisir ces astres à leur passage par un même vertical, cette variation est à son plus haut point de grandeur, ou en est voisine, 1°. Dans le cas où les angles azymuthaux changent en sens différens, lorsque leurs changemens sont les plus grands, ou peu s'en faut. 2°. Dans le cas où ces angles changent en même sens, lorsque l'un de ces angles est dans son état de plus grand changement, ou en approche, & que l'autre est un de ceux qui changent le moins parmi ceux qui peuvent être combinés avec celui-là. Or c'est ce qui arrive lorsque l'astre supérieur est fort près du zénith & du méridien, & que l'astre inférieur est fort près de l'horison, ainsi que du méridien.

Le premier cas a lieu, lorſque les deux aſtres ſont du côté du premier vertical, où eſt le pole élevé; & la circonſtance dont il s'agit s'y trouve en effet : car l'aſtre ſupérieur étant au-deſſus du pole, eſt mû d'Orient en Occident; & d'ailleurs plus il eſt près du zénith, plus ſon angle azymuthal change rapidement; & l'aſtre inférieur étant plus bas que le pole, revient d'Occident en Orient au regard de l'horiſon, & d'ailleurs, plus il eſt près tant du méridien que de l'horiſon, plus le changement de ſon angle azymuthal eſt grand. La liaiſon de la proximité du méridien avec ce plus grand changement, eſt aſſez évidente par ce qui a été dit ci-deſſus. Pour l'autre point, ſçavoir que plus un aſtre ſitué au-deſſous du pole & dans le méridien ou auprès, eſt voiſin de l'horiſon, plus le changement de ſon angle azymuthal eſt grand, je le prouve, pour abréger, par le calcul. Nous avons $mk=yt$, par la cinquieme formule de M. de Maupertuis. Faiſant donc varier m & t, qui ſont les ſinus de l'angle azymuthal & de l'angle horaire, pendant que k & y, qui ſont les coſinus de la hauteur & de la déclinaiſon de l'aſtre, demeurent conſtans, nous avons $kdm=ydt$, ou $dm=\frac{y}{k}dt$. Et lorſque l'aſtre eſt fort près du méridien, ce qui rend les ſinus m & t fort petits, leurs variations dm, dt, ſont à peu près les mêmes que celles des angles auxquels appartiennent ces ſinus : la variation inſtantanée de l'angle azymuthal eſt donc proportionnelle à $\frac{y}{k}$ dans cette circonſtance. Or, je dis que cette fraction eſt d'autant plus grande, que l'aſtre eſt plus bas; car le coſinus y de ſa déclinaiſon en eſt d'autant plus grand, & quoique k ſoit auſſi plus grand que ſi l'aſtre étoit moins bas, l'augmentation que reçoit y eſt plus grande que celle de k; donc, &c.

Le second cas a lieu, lorsque les deux astres sont du côté du premier vertical où n'est pas le pole élevé, & la circonstance marquée ci-devant s'y trouve aussi, car les deux astres sont mûs en même sens, & l'angle azymuthal de celui qui est supérieur & voisin du zénith, change beaucoup: mais celui de l'astre inférieur change d'autant moins, qu'il est plus près de l'horison, & qu'il décline plus par conséquent de l'équateur, ce qui rend le cosinus y de sa déclinaison d'autant plus petit; car cet astre étant voisin du méridien, la variation de son angle azymuthal est, comme nous venons de le voir, proportionnelle à $\frac{y}{k}$. Or cette fraction est d'autant moindre, que son numérateur y est plus petit, & son dénominateur k plus grand. Il est vrai que l'astre inférieur étant supposé voisin du méridien, cette partie de son cours est celle où son angle azymuthal reçoit le plus grand changement: mais cela n'empêche pas que la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux des deux astres situés de cette maniere, ne soit plus grande que s'ils étoient dans ou auprès d'un azymuth éloigné du méridien, parce que le changement de l'angle azymuthal de l'astre supérieur, est beaucoup plus grand dans la premiere circonstance que dans l'autre.

Il suit de-là, & du principe exposé ci-devant, que pour déterminer le plus sûrement l'heure par l'observation du passage de deux astres par un même vertical, il faut 1°, que ce vertical MZ, où on croit voir les deux astres, *Fig.* 25, 27, &c. soit le plus près qu'il est possible du méridien (de même que doit être situé, comme on l'a vû, le vertical μZN pour la même détermination, lorsqu'on observe deux astres dans un même almicantarath); & cette position du vertical MZ auprès du méridien, se-

roit au contraire très-défavorable à l'invention de la hauteur du pole. Il faut 2°, pour la détermination de l'heure par le moyen dont il s'agit, que l'un des astres soit fort élevé, & l'autre fort bas. Je parlerai encore du même sujet dans le Chapitre suivant.

D'un autre côté, la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux de deux astres, est dans l'état de la plus grande petitesse, ou voisine de cet état, lorsque ces angles varient en même sens & également, ou presque également, & le moins qu'il est possible ; & c'est ce qui se rencontre, lorsque ces astres sont de même part du méridien, & que le vertical où on croit les voit est co-incident avec le premier vertical, ou en est peu éloigné. Cette position des deux astres est donc la plus avantageuse pour l'invention de la hauteur du pole, & la plus désavantageuse pour la détermination de l'heure. Au reste, il faut encore, pour obtenir le plus sûrement la hauteur du pole par ce moyen, que l'un des astres soit fort élevé, & l'autre fort bas : la raison en est, que la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux de deux astres ainsi disposés, a un plus petit rapport à la variation totale de cet élément, que si les deux astres étoient à des hauteurs moins différentes : car deux astres situés en certain moment au premier vertical, l'un fort élevé & l'autre fort bas, seront dans quelque autre partie de leurs cours, en des azymuths bien plus éloignés, que ne seront deux astres qui se seront pareillement rencontrés au premier vertical, mais qui sont plus voisins que ceux-là, &c.

Ce que je viens de dire sur l'état de la variation instantanée de l'angle compris entre les azymuths de deux astres, convient aux cas où cet angle est réputé nul. A l'é-

gard de ceux où cet angle est supposé réel, & doit même avoir quelque grandeur (tels sont les cas énoncés dans les Probl. XV & XVI.), je me borne à quelques exemples sur l'état de la variation dont il s'agit, parce que le détail de toutes les rencontres seroit trop long, & peut-être ennuyeux : d'ailleurs il ne sera pas difficile de le suppléer, à celui qui aura bien compris ce qui précede.

Au Probleme XVI, on fait usage de l'angle des azymuths de deux astres, situés sur un même almicantarath. Si donc les deux astres sont assez près du méridien, & de même part de ce cercle, en sorte que le vertical μZN, équidistant des deux astres, soit voisin du premier vertical (position avantageuse pour l'invention de la hauteur du pole), & si d'ailleurs les deux astres sont peu élevés, & moins que le pole, l'angle azymuthal de l'un croîtra, & celui de l'autre décroîtra, & les changemens de ces angles seront presque égaux : ainsi la variation de l'angle des azymuths de ces astres sera petite, & désavantageuse par conséquent pour l'invention de l'heure : mais si les astres sont elevés, & plus élevés que le pole, en sorte que celui qui est du côté du pole, soit au-dessus du point de sa plus grande digression du méridien, les angles azymuthaux des deux astres changeront en même sens, & presque également : ainsi la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths sera grande, & pourra même être beaucoup plus grande que celle de l'angle horaire. Cette situation des astres seroit donc assez avantageuse pour l'invention de l'heure, si l'angle de leurs azymuths pouvoit être pris avec peu d'erreur : mais plus les astres sont élevés, & plus l'erreur à laquelle on est exposé en prenant cet angle doit être grande, & je ne sçais si elle ne pourroit pas monter à un degré trop considérable. Il n'y a donc peut-être

pas

pas de position des astres qui soit fort favorable en effet à la détermination de l'heure, dans le cas où le vertical μZN est voisin du premier vertical.

Que si on suppose que les deux astres qui ont même hauteur sont fort proches du premier vertical, & de même part de ce cercle, en sorte que le vertical μZN, équidistant des deux astres, soit voisin du méridien (position avantageuse pour l'invention de l'heure), on appercevra que l'observation de l'angle des azymuths de ces astres ne seroit pas bien favorable pour la détermination de la hauteur polaire, si les astres étoient bas; & s'ils étoient élevés, l'observation de cet angle seroit peut-être sujette à une trop grande erreur, pour être utile à la même détermination.

Au Probleme XV, le vertical où sont deux astres, peut se trouver situé très-favorablement pour donner l'heure, ou pour donner la hauteur du pole; mais l'observation de l'angle de ce vertical avec celui du troisieme astre, ne seroit assez avantageuse ni pour donner la hauteur du pole dans le premier cas, ni pour donner l'heure dans le second, si le troisieme astre étoit fort bas, quand bien l'angle dont il s'agit seroit fort grand dans le second cas, &c. Que si le troisieme astre étoit fort élevé, cet angle pourroit être tel, que s'il étoit observé sans trop d'erreur, on auroit de l'avantage pour trouver l'heure dans le second cas (& alors il faudroit que cet angle fût de 90 degrés, ou approchant), ou pour trouver la hauteur polaire dans le premier: mais l'observation supposée seroit peut-être sujette à un défaut trop grand en soi, pour que sa conséquence pût être légere. Les Probl. XV & XVI ne sont donc peut-être propres dans la pratique, qu'à donner l'une ou l'autre de ces choses, la hauteur du pole, ou l'heure, selon la rencontre.

Au Probleme XVII, on fait usage de l'angle des azymuths de deux astres, & de la hauteur de l'un d'entre eux. Or, si l'on ne désire qu'une de ces choses, l'heure & la hauteur du pole, il est à propos que l'angle dont il s'agit, approche de 90°, plutôt que de s'en éloigner. Si, par exemple, c'est l'heure seulement que l'on veut déterminer, il faut déja, comme on l'a vû, que l'astre dont la hauteur sera observée, soit voisin du premier vertical, & il est encore à propos que l'autre astre soit auprès du méridien, parce que la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths en sera plus grande, puisque le premier astre est vers la partie de son cours, où le changement de son angle azymuthal est le plus petit, & que l'autre sera vers la partie de son cours, où le changement de son angle azymuthal est le plus grand.

Mais si l'on souhaite que l'une des observations du Probleme XVII soit avantageuse pour la détermination de l'une des choses dont il s'agit, & que l'autre observation le soit pour celle de l'autre chose, l'angle des azymuths des deux astres doit être au moins fort petit, s'il ne peut être nul; d'ailleurs l'un des astres doit être assez élevé, & l'autre fort bas. Si l'astre, par exemple, dont la hauteur sera observée, est voisin du méridien, ce qui est avantageux pour déterminer la hauteur polaire, il est clair qu'afin que l'observation de l'angle des azymuths des astres soit favorable pour la détermination de l'heure, il faut 1° que l'autre astre soit pareillement voisin du méridien, & que les hauteurs des astres soient très-différentes, parce que la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths en sera d'autant plus grande, ces azymuths avançant dans ce cas en sens contraires, & chacun avec une rapidité approchante de la plus grande qu'il puisse avoir. 2°. Les astres étant supposés de même part du premier

vertical, il eft à propos, le refte étant égal, qu'ils foient auffi de même part du méridien, parce que la variation inftantanée de l'angle de leurs azymuths aura un plus grand rapport à la variation totale de cet élément, que fi les deux aftres étoient de divers côtés du méridien; il faut donc que l'angle des azymuths des aftres foit fort petit dans l'exemple propofé, & le plus avantageux feroit qu'il fût nul. Pareillement fi l'aftre dont la hauteur fera obfervée eft voifin du premier vertical, ce qui eft avantageux pour l'invention de l'heure, il faut que l'autre aftre foit voifin auffi du même cercle, afin que l'obfervation de l'angle des azymuths des aftres foit favorable pour l'invention de la hauteur du pole, parce que la variation inftantanée de cet élément fera fort petite, les azymuths des aftres avançant dans ce cas en même fens, & avec le plus de lenteur, ou à-peu-près, qu'il fe puiffe, &c. Donc encore dans cet exemple, l'angle des azymuths des aftres doit être fort petit, &c.

Jufqu'ici j'ai expofé les états de la variation inftantanée des divers élémens employés dans les Problemes, touchant l'heure & la hauteur du pole, & j'ai fait en même tems l'application de mon Principe, au cas où l'on demande feulement l'une ou l'autre de ces chofes, & où on la cherche foit par une, foit par deux obfervations. Il s'agit maintenant de ftatuer fur le cas où l'on demande conjointement l'heure & la hauteur du pole, ce qui requiert néceffairement la combinaifon de deux obfervations; & je dis, 1°. Qu'il faut faire l'une des obfervations dans la rencontre la plus favorable à l'invention de l'heure, & l'autre obfervation dans la rencontre la plus favorable à l'invention de la hauteur du pole, nonobftant que la premiere rencontre ne foit pas propre à donner la hauteur du pole, & que la deuxieme ne foit pas propre non

plus à donner l'heure; car ces défauts respectifs des observations deviennent indifférens, dès que chacune de ces observations est avantageuse pour une des choses demandées, puisqu'il n'est pas nécessaire de bien connoître la hauteur du pole, pour obtenir l'heure aussi exactement qu'il se peut, ni de bien connoître l'heure, pour obtenir pareillement la hauteur du pole avec la justesse possible.

Par exemple, si c'est par le passage de deux couples d'astres à deux verticaux, que l'on veuille déterminer l'heure & la hauteur du pole, ce qui est le *sujet* du Probleme XI, il faut que l'un des verticaux soit co-incident, s'il se peut, avec le méridien, ou en soit fort voisin, & que l'autre soit de même co-incident avec le premier vertical, ou fort près de ce cercle. Si c'est par les hauteurs de deux astres que l'on cherche les deux choses dont il s'agit, ce qui est le sujet du Probleme second, il faut que l'un des astres soit sur le premier vertical, ou auprès, & que l'autre soit au méridien, ou en soit proche, &c.

2°. Si les deux rencontres ou circonstances *qui se présentent*, pour les deux observations dont on a besoin, ne sont pas les plus favorables de toutes, chacune à chaque chose demandée, il faut, le reste étant égal, que ces circonstances aient entre elles un certain rapport égal, ou approchant de celui qui se trouve entre les circonstances qui sont absolument les plus favorables de toutes. C'est ce qui va être expliqué par des exemples.

Au Probleme second, les deux rencontres les plus favorables absolument, tant à l'invention de l'heure, qu'à celle de la hauteur du pole, sont, comme je viens de le dire, que l'un des astres soit au méridien, & l'autre au premier vertical. Or il se trouve entre ces circonstances ce rapport, sçavoir que les azymuths des deux astres sont un

angle droit. Lors donc qu'il n'y aura ni sur le premier vertical, ni au méridien, des astres dont on puisse observer les hauteurs, il faudra, le reste étant égal, en choisir deux dans les parties du ciel adjacentes, dont les azymuths fassent un angle droit, ou approchant d'un droit, par préférence à ceux dont les azymuths feroient un angle plus différent d'un droit. Si, par exemple, il y a un astre E à côté du méridien, dans la partie orientale & méridionale du ciel, un second astre E' à côté du premier vertical, dans la partie Orientale & Septentrionale, enfin un troisieme astre E'' à même distance que l'astre E' du premier vertical, mais situé dans la plage Occidentale & Septentrionale, l'azymuth du premier astre, fait avec l'azymuth du second un angle plus approchant d'un droit, que n'est celui qu'il fait avec l'azymuth du dernier astre. C'est donc la hauteur de l'astre E' qu'il faut observer, & combiner avec celle de l'astre E, préférablement à celle de l'astre E''.

Au Probleme XI, où l'on fait usage du passage de deux couples d'astres à deux verticaux, il faut, si ces verticaux sont autres que le méridien & le premier vertical, qu'ils fassent du moins un angle droit, ou approchant d'un droit. Au Probleme XIII, où l'on fait usage des passages d'une couple d'astres à un vertical, & d'une autre couple à un même almicantarath, il faut pareillement que le vertical $\mu ZN'$, équidistant de ces derniers, fasse avec celui où passent les deux premiers, l'angle le plus approchant d'un droit.

Je fonde cette deuxieme regle en premier lieu, sur son analogie avec la regle précédente. Je pourrois l'établir en second lieu, en spécifiant, & en prouvant par le calcul l'avantage de la pratique proposée. Il consiste, cet avantage, lorsque les deux observations sont erronées,

d'un côté en ce que leurs erreurs quelconques ont des effets contraires à l'égard de l'une ou de l'autre des choses désirées; c'est-à-dire, soit à l'égard de l'heure, soit à l'égard de la hauteur du pole, effets qui se compensent par conséquent jusqu'à un certain point, & peuvent se compenser parfaitement: d'un autre côté, en ce que les erreurs des observations ne tirent que médiocrement à conséquence, pour la chose à l'égard de laquelle elles sont conspirantes. Et dans le cas où une seule des observations pecheroit, le vice de cette observation partageroit son influence entre les deux choses désirées, de maniere que son effet en seroit moindre sur chacune. Mais si l'on s'écartoit de la regle dont il s'agit, les défauts des observations, ou le défaut seul de l'une d'elles, entraîneroit une erreur non-médiocre sur l'une des choses désirées, & d'ailleurs lorsque les deux observations pecheroient, leurs défauts pourroient ne pas produire des effets contraires à l'égard de l'autre chose.

L'avantage que j'attribue à la seconde regle, peut enfin être rendu sensible par la confection de quelques figures, & par des exemples, & c'est le parti que je prends. Je donnerai par la même voie, une nouvelle preuve de la premiere regle du cas dont il s'agit, & je retoucherai un point traité précédemment. Ces démonstrations serviront d'ailleurs, ou conduiront à deux choses; sçavoir 1° à enseigner au Navigateur un moyen facile de discerner à peu près le degré d'erreur auquel il est exposé dans la recherche de l'heure, ou de la hauteur du pole, ou de l'angle azymuthal d'un astre, en quelque occurrence qu'il se trouve. 2°. A justifier ce que j'ai avancé touchant quelques utilités du planisphere proposé ci-devant.

Je prends le sujet du Probleme second pour exemple. Soit, *Fig.* 31, 32, 33, 34, *P* le pole; *z* le vrai zénith,

$P\Sigma$ une partie du vrai méridien : ſoient $\varsigma\Sigma E$, & $\varsigma'\Sigma E'$, ou $\Sigma\varsigma' E'$ des portions des verticaux où ſont réellement les aſtres E, E', dont les hauteurs ſont obſervées : ſoient $Z\varsigma$, $Z\varsigma'$, des arcs des cercles qui ont les points E, E' pour poles, & pour amplitudes les complémens des hauteurs obſervées, arcs dont l'interſection Z eſt différente du vrai zénith, lorſque les obſervations des hauteurs des aſtres péchent, ſoit par excès, ſoit par défaut, & eſt priſe cependant pour le zénith. Les arcs $\Sigma\varsigma$, $\Sigma\varsigma'$, ſont égaux aux petites quantités dH, dH', dont on peut ſe tromper dans ces obſervations. Les arcs $Z\varsigma$, $Z\varsigma'$, ayant leurs poles dans les azymuths $\varsigma\Sigma E$, $\varsigma'\Sigma E'$, ſont perpendiculaires à ces cercles : ſi l'on peut donc regarder les lignes qui compoſent le quadrilatere $Z\varsigma\Sigma\varsigma'$ rectangle en ς, ς', comme droites ou preſque droites, on aura l'angle $\varsigma Z\varsigma'$, égal ou à peu près égal au complément de l'angle $\varsigma\Sigma\varsigma'$ que font les deux verticaux où ſont les aſtres : ainſi les lignes ςZ, $\varsigma' Z$, ont à peu près la même inclinaiſon reſpective que les verticaux des aſtres ; & ſi ces verticaux comprennent un angle droit, *Fig.* 31, 32, 33, l'angle $\varsigma Z\varsigma'$ eſt droit, ou à peu près, & le quadrilatere $Z\varsigma\Sigma\varsigma'$ peut être pris pour un parallelogramme.

Suppoſons maintenant 1° que l'un des aſtres eſt au méridien, & l'autre au premier vertical, conformément à la premiere regle, *Fig.* 31, & que l'erreur $\varsigma'\Sigma$ ſur la hauteur du premier eſt de 10 minutes, & l'erreur $\varsigma\Sigma$ ſur la hauteur du ſecond, de 15 ; le zénith putatif Z ſera, il eſt vrai, éloigné du véritable de 18 minutes & plus, mais d'un côté ce faux zénith Z ſera ſeulement éloigné du méridien d'une quantité à peu près égale à $\varsigma\Sigma$, qui eſt l'erreur commiſe ſur la hauteur de l'aſtre ſitué au premier vertical. L'angle $ZP\Sigma$ eſt l'erreur qui en réſulte ſur l'angle horaire, & il eſt aiſé de reconnoître que cet angle eſt à

l'arc $\epsilon\Sigma$, à peu près comme le ſinus total eſt au ſinus de $P\Sigma$, c'eſt-à-dire au coſinus de la hauteur du pole. (C'eſt ce que nous avons déja vû plus haut, en trouvant par le calcul $dE = \frac{r}{c} dH$.) D'un autre côté, le faux zénith ſera ſeulement éloigné du premier vertical d'une quantité à peu près égale à $\epsilon'\Sigma$, en ſorte que $PZ - P\Sigma$, ou $P\Sigma - PZ$, qui eſt l'erreur réſultante ſur la hauteur du pole, ſera égale ſeulement à l'erreur ſur la hauteur de l'aſtre ſitué au méridien, c'eſt-à-dire, de dix minutes ou environ.

Enfin, les cercles ZE, ZE', étant pris pour les azymuths des aſtres, les angles $ZE\Sigma$, $ZE'\Sigma$, ſeront les erreurs ſur les angles azymuthaux. Remarquons en paſſant, que plus les aſtres ſeront bas, moins ces erreurs ſeront conſidérables, & que les hauteurs étant égales, on ſera expoſé à une moindre erreur ſur l'angle azymuthal de l'aſtre ſitué au premier vertical, que ſur l'angle de l'autre.

Suppoſons 2° que les deux aſtres ſont dans des azymuths également éloignés du méridien & du premier vertical, rencontre qui s'écarte de ce que requiert la premiere regle le plus qu'il ſe puiſſe, en rempliſſant la ſeconde. Suppoſons encore que les erreurs ſur les obſervations des hauteurs de ces aſtres ſont égales, & de 15 minutes chacune; le quadrilatere $Z\epsilon\Sigma\epsilon'$ ſera un quarré, & la diſtance du zénith putatif Z au vrai zénith, ſera de plus de 21 minutes: mais dans le cas de la *Fig* 32, le point Z ſe trouve ſur le méridien, & l'erreur dans la poſition de ce point, tombe ſeulement ſur la hauteur du pole: & dans le cas de la *Fig.* 33, le point Z ſe trouve ſur le premier vertical, ainſi on ſe trompe de l'angle $ZP\Sigma$ ſur l'heure, & comme PZ ne differe pas ſenſiblement

blement de $P\Sigma$ en grandeur, il ne réſulte pas d'erreur ſur la hauteur du pole. Dans le cas des *Fig.* 32 & 33, les deux aſtres ſont de même part du méridien ; il en ſeroit de même ſi les deux aſtres étoient de différens côtés de ce cercle, l'erreur dans la poſition de Z, pourroit n'influer que ſur la détermination de l'heure, ou que ſur celle de la hauteur du pole, ainſi que je l'ai avancé. Quant à ce que j'ai dit que l'erreur réſultante de celles des obſervations n'eſt que *médiocre*, je l'entends dans ce ſens, que la diſtance des points $Z\Sigma$ eſt moindre que la ſomme des erreurs des deux obſervations. On doit bien appercevoir maintenant, & ſans que je le montre plus expreſſément, que la rencontre des *Fig.* 32 & 33 eſt moins avantageuſe que celle de la *Fig.* 31, requiſe par la premiere regle, pour le cas où l'on demande conjointement l'heure & la hauteur du pole.

Si dans cette hypotheſe des *Fig.* 32, 33, l'obſervation de la hauteur d'un des aſtres étoit exacte, celle, par exemple, de l'aſtre E, la ligne $Z\varsigma$ tomberoit en $\varsigma'\Sigma$, & le point Z en ς', en ſorte que le zénith putatif ſeroit également éloigné du méridien, & du premier vertical, ſçavoir des quantités $\varsigma'\delta$, & $\delta\Sigma$, moindres chacune que l'erreur $\varsigma'\Sigma$, commiſe par excès, ou par défaut, ſur la hauteur de l'aſtre E' $\varsigma'\Sigma$ étant de 15 minutes, $\varsigma\delta = \delta\Sigma$, ſeroit d'environ 10 minutes & demie.

Suppoſons 3°, que les azymuths des deux aſtres ſont un angle très-différent d'un droit, & que ces azymuths, ou du moins l'un d'entre eux, ſont beaucoup plus près du premier vertical que du méridien, *Fig.* 34. Cette rencontre approche de celle que recommande la regle que j'ai donnée, pour le cas où l'on déſireroit avoir ſeulement l'heure, & elle eſt rejettée par les deux regles du cas où l'on chercheroit conjointement l'heure & la hauteur du

pole : auſſi eſt-il viſible, que le zénith putatif Z eſt fort éloigné du vrai zénith Σ, lorſque les erreurs des obſervations auxquelles ſont égales les arcs $\varsigma\Sigma$, $\varsigma'\Sigma$, ont des influences contraires à l'égard de l'heure, & que cet éloignement des points Z, Σ, cauſe une erreur notable ſur la détermination de la hauteur du pole, erreur qui eſt d'autant plus grande, le reſte étant égal, que le point Z eſt plus voiſin du méridien.

Pour ſupplément à ce que j'ai dit ſur le cas où l'on chercheroit ſeulement l'heure par les obſervations des hauteurs de deux aſtres, j'ajoûte que quand les branches d'azymuth où ils ſe trouvent, ſont un angle très-aigu, & que l'un des deux eſt à une hauteur médiocre, il faut que l'autre ſoit à une hauteur différente. La raiſon de cette regle eſt plus aiſée à appercevoir par la confection d'une figure qu'autrement. Elle dépend, cette raiſon, de ce que les arcs $Z\varsigma$, $Z\varsigma'$, des cercles qui ont les deux aſtres pour poles, & les complémens de leurs hauteurs pour amplitudes, ont leurs concavités tournées en même ſens dans la premiere ſuppoſition, &c. Dans le cas de la même recherche, & lorſque les branches d'azymuth où ſont les aſtres, ſont auſſi un angle très-aigu, ou bien en ſont un fort obtus, il faut encore que les aſtres ne ſoient pas tous deux très-bas, s'ils ſont à quelque diſtance du premier vertical, &c. En un mot, il faut communément que les deux aſtres par les hauteurs deſquels on prétend déterminer l'heure ſans la hauteur du pole, & indépendamment de la connoiſſance qu'on peut avoir de cette hauteur par eſtime, ne ſoient pas bien voiſins (le Lecteur ſuppléera aiſément les raiſons de cette aſſertion). Et de-là il ſuit, que lorſqu'un ſeul aſtre ſe préſente à l'Obſervateur, il faut qu'il y ait certain intervalle entre les momens où il prendra deux hauteurs de cet aſtre, afin qu'il puiſſe en déduire l'heure avec quelque juſteſſe.

Je crois qu'on apperçoit déja, par les *Fig.* 31, 32, 34, l'utilité que le Navigateur tireroit d'un planisphere, pour découvrir les limites de l'erreur, que les vices inévitables de ses observations peuvent jetter en certaines rencontres dans la recherche qu'il veut faire, soit de l'heure, soit de la hauteur du pole, soit de l'angle azymuthal d'un astre. Et pour juger par-là si ses observations méritent ou non dans ces rencontres, qu'il prenne leur résultat par la voie du calcul ; après avoir déterminé le point du zénith putatif Z, il n'auroit qu'à opérer ensuite sur des suppositions qui différassent de ses observations, autant que celles-ci peuvent s'écarter de la réalité : il formeroit ainsi une figure, dans laquelle le point du vrai zénith seroit enfermé ; & il verroit jusqu'où ce point peut être éloigné pour le plus, soit du méridien, soit du premier vertical putatif, qui passent par Z. Le Navigateur n'auroit pas même absolument besoin de faire cette figure en entier, ni de la construire toûjours avec une scrupuleuse précision.

Qu'il décrive, par exemple, dans le cas du Probleme second, des arcs σs, $s\sigma$, &c. *Fig.* 35, des cercles qui ont les deux astres pour poles, & pour amplitudes respectives les complémens de leurs hauteurs observées, plus & moins les quantités dH, dH', dont on peut se tromper dans ces observations : ces arcs composeront autour de Z, un quadrilatere $s\sigma s\sigma$, dans lequel sera contenu le point du vrai zénith. Or comme le vertical de l'un ou de l'autre des astres, divise ce quadrilatere en deux portions qui sont à peu près égales & semblables, il n'est pas nécessaire de le former en entier, il suffit d'en faire une moitié, & même la partie de cette moitié où est la limite du plus grand écart où l'on puisse tomber à l'égard du méridien, ou du premier vertical. Il n'est pas nécessaire non plus, de chercher les centres propres des arcs $s\sigma$,

σs, &c. On peut opérer sur ceux qui ont servi pour la détermination du point *Z*, en changeant seulement l'ouverture du compas. On peut en un mot, prendre bien des licences, & faire cette espece d'opération très-promptement.

Voici un autre exemple. Si l'on est dans le cas du Probleme VII, où la hauteur du pole étant donnée, & deux astres étant réputés vûs au même vertical, on cherche l'heure. Soit, *Fig. 36*, *ENE'Z* le grand cercle sur lequel ces deux astres sont situés; *PZ* le complément de la hauteur polaire donnée : le vrai zénith peut se trouver à quelque distance de part ou d'autre du grand cercle *ENE'Z*. Soient donc décrits des arcs sσ, sσ, de cercles paralleles à *ENE'Z*, & qui en soient autant éloignés, que l'on présume que ce grand cercle peut être écarté du vrai zénith : puis du centre *P*, soient décrits d'autres arcs ss, σσ, de cercles qui aient pour amplitudes le complément de la hauteur polaire supposée, plus & moins la quantité dont on a pû se tromper dans l'observation, ou l'estime de cette hauteur, & l'on aura un quadrilatere σssσ, où le point du vrai zénith sera enfermé.

On doit remarquer maintenant, si on ne l'a fait déja, que les rencontres que j'ai dit être avantageuses pour la recherche de l'heure & de la hauteur du pole, ont la plûpart ce caractere, sçavoir que les lignes qui doivent être tirées sur le planisphere, pour la solution des Problemes touchant ces choses, se coupent dans ces rencontres perpendiculairement, ou à peu près. J'ai dit, par exemple, que quand on veut observer deux astres dans un même vertical, ce qui est supposé aux Probl. VII, XI, &c. il faut que l'un des astres soit très-élevé, & l'autre fort bas; c'est-à-dire, que l'intervalle de ces astres approche de 90 degrés : & il est visible que cela étant, les deux arcs

de-cercle qu'il faut décrire pour trouver sur le planisphere le pole Q du grand cercle, sur lequel les deux astres sont situés, & pour avoir ainsi le moyen de tracer ce grand cercle, feront des angles approchans d'un droit.

J'ai dit pour le cas du Probl. VII, que le vertical où les deux astres sont observés, doit être fort voisin du méridien ; & il est visible que cela étant, le cercle $Zi\zeta$, décrit autour du pole, *Fig.* 25, avec un rayon équivalent au complément de la hauteur donnée de ce point, coupera le vertical des astres sous un angle approchant d'un droit. J'ai dit pour le cas du Probl. XVII, où l'on suppose donné l'angle des azymuths de deux astres, avec la hauteur de l'un d'eux ; que lorsqu'on cherche conjointement l'heure & la hauteur du pole, cet angle doit être fort petit : & l'on peut voir que cela étant, on tirera des lignes presque perpendiculaires dans l'opération graphique, par laquelle on déterminera la position de l'astre dont la hauteur n'est pas observée, &c.

Au contraire, les rencontres désavantageuses, & les plus désavantageuses, au moins à quelque égard, ont cette qualité que les lignes qui doivent être tracées pour la solution des Problemes dont il s'agit, sont inclinées l'une à l'autre, & fort inclinées.

Or, quand des lignes se coupent perpendiculairement, ou à peu près, leur point d'intersection est facile à discerner, & ce point seroit au contraire difficile à reconnoître, si les lignes qui se croisent, étoient fort inclinées respectivement.

Donc 1°, lorsque les intersections des lignes tracées sur le planisphere pour la détermination de l'heure & de la hauteur du pole, seront difficiles à discerner, le Navigateur peut de cela seul conclurre pour l'ordinaire, que la rencontre où il a fait son observation, ou ses observa-

tions, eſt déſavantageuſe au moins à quelque égard, en ſe ſervant même du calcul.

2°. Puiſque les interſections des lignes tracées ſur le planiſphere, pour les Problemes dont il s'agit, ſont faciles à diſcerner dans les rencontres avantageuſes, on doit en conclurre que l'uſage du planiſphere eſt peu défectueux dans ces rencontres, & qu'il ne le ſeroit notablement, que dans celles qui doivent être rejettées. Cette conſéquence eſt peut-être aſſez évidente, cependant pour ne rien négliger, je vais l'appliquer à un exemple.

Soient deux aſtres réputés vûs dans un même vertical; quelque ſoit leur poſition, on ſera, je l'avoue, expoſé en opérant ſur le planiſphere, à mettre un peu à côté de leur vraie place, les arcs dont l'interſection doit indiquer le pole du grand cercle qui paſſe par les aſtres, parce qu'on peut faire les rayons de ces arcs un peu trop grands ou trop petits. Or ſi les deux aſtres étoient fort voiſins, on ſeroit d'ailleurs expoſé à prendre, au lieu du vrai point d'interſection de ces arcs, bien ou mal placés, un autre point qui en ſeroit éloigné: ainſi on riſqueroit de placer fort mal le pole putatif du grand cercle des deux aſtres, & d'en décrire un autre qui en ſeroit fort écarté par quelques endroits, entre leſquels pourroit être la région du zénith. L'uſage d'une opération graphique ſeroit donc, j'en conviens, défectueux dans cette rencontre où les aſtres ſont voiſins: mais auſſi elle eſt déſavantageuſe, cette rencontre, puiſqu'on y ſeroit expoſé à réputer les aſtres dans un même vertical, en quelque moment où le grand cercle ſur lequel ils ſont ſitués, ſeroit fort écarté du zénith. Mais ſi l'un des aſtres eſt fort élevé, & l'autre fort bas, en ſorte que leur intervalle approche de 90 degrés, on diſcernera très-bien le vrai point d'interſection des arcs tracés pour l'invention du pole du grand cercle où ſont

les deux astres : ainsi on ne risquera pas de se tromper notablement dans la fixation de ce pole, & le cercle qu'on décrira par les deux astres, en conséquence de cette fixation ne pourra s'écarter que peu de ce grand cercle, où ils sont réellement, principalement vers la région du zénith. L'opération graphique ne sera donc que peu défectueuse en cette rencontre.

Au reste, je crois qu'on voit assez pourquoi j'ai usé de restriction dans la remarque précédente. Il y a en effet des rencontres avantageuses à quelque égard, quoique le vrai point d'interfection des lignes tracées sur le planisphere soit difficile à discerner en ces rencontres. Ainsi celle qui répond à la *Fig.* 34, est favorable d'un côté pour la détermination de l'heure, quoique désavantageuse d'ailleurs pour l'invention de la hauteur du pole : & l'on peut voir encore que l'opération graphique a deux qualités différentes en cette rencontre, c'est-à-dire, qu'elle est peu défectueuse pour la détermination de l'heure, quoiqu'elle le soit beaucoup pour celle de la hauteur polaire : car la ligne qui joint les points *P*, *Z*, & qui est le méridien putatif, étant fort inclinée aux deux arcs *cZ*, *dZ*, il est aisé de reconnoître la vraie position de cette ligne, & l'on ne peut gueres s'en écarter, quoique le zénith putatif *Z* soit difficile à fixer, & que l'on puisse le placer notablement trop loin, ou trop près du pole. Il en est de même pour tout autre cas favorable, où les lignes tracées sur le planisphere seroient fort inclinées ; & il est vrai généralement & absolument, que les opérations graphiques ont toute la précision dont ce genre est susceptible, & qu'elles sont par conséquent peu défectueuses, dans toutes les rencontres favorables à quelque détermination, & relativement à cette détermination.

Pour conclusion de ce long Chapitre, je vais donner

le résultat du calcul trigonométrique, à l'égard d'une hypothese prise pour exemple, par un des premiers Membres d'une Compagnie très-sçavante. Cela servira à montrer de plus en plus, l'importance des regles que j'ai établies. J'ai rapporté au Chapitre second de la Partie précédente, que l'on a proposé dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, un procédé pour l'invention de l'heure, de la hauteur du pole, & de l'angle azymuthal. * Ce procédé me paroît très-bon, comme je l'ai déja dit: mais qu'il me soit permis d'ajoûter, que le cas particulier auquel on l'a appliqué, n'a pas été bien choisi.

On suppose que l'on a observé deux hauteurs du Soleil, *à une heure d'intervalle seulement*, la déclinaison de cet astre étant de 13° 50′ du côté du pole élevé, & que l'une des hauteurs est de 36° 53′, & l'autre de 45° 53′. Les observations étant supposées parfaitement exactes, il en résulte que la hauteur du pole est de 46° 45′; que l'angle horaire au moment de la premiere observation, est de 50° 10′ 4″, 4 (ce qui réduit en tems, donne cette observation à 8 heures 39′ 19″ 42‴ du matin); que l'angle azymuthal du Soleil au moment de la même observation, est de 68° 47′, & au moment de la deuxieme observation, de 53° 27′ 22″, en sorte que l'angle de l'azymuth du Soleil avec le premier vertical, est de 36° 32′ 44″ en ce second moment, & que l'angle des deux azymuths du Soleil, est seulement de 15° 19′ 38″.

Pour revenir à ce qui est ordinaire, supposons maintenant que les observations des deux hauteurs sont erronées. Il y a, je l'avoue des combinaisons d'erreur, dont la conséquence n'est pas considérable; tels sont les cas où ces observations pecheroient toutes deux en même sens, soit

* C'est dans un Mémoire intitulé : *Résolution d'une Question astronomique, utile à la Navigation*. Pag. 255. des Mém. de 1736.

par

par excès, soit par défaut. Supposons, par exemple, qu'elles sont trop foibles chacune de six minutes, c'est-à-dire, que la premiere hauteur est réputée de 36° 47′, dont le complément est 53° 13′, & la seconde de 45° 47′, dont le complément est 44° 13′. D'ailleurs, faisons abstraction du déplacement de l'Observateur, tant en longitude qu'en latitude, pendant l'intervalle des observations, &c. Cet intervalle étant d'une heure juste, l'arc de grand cercle *EE′*, compris entre les deux lieux du Soleil dans son parallele, est de 14° 34′, & l'angle *PEE′* de cet arc avec l'horaire du Soleil, est de 88° 12′, selon le mém. cité. On trouve donc pour l'angle putatif *ZEE′* de cet arc, avec l'azymuth du Soleil au moment de la premiere observation, 47° 4′ 46″: ainsi l'angle putatif *PEZ* de cet azymuth du Soleil avec son cercle horaire, est de 41° 7′ 4″, & on trouve pour l'angle horaire putatif *EPZ* en ce moment 50° 18′ 23″, 45; (c'est environ 8′ 19″ d'excès sur le véritable, ou bien une erreur de 33″ 16‴ de tems) & pour la hauteur putative du pole, 46° 48′ 22″. (c'est 3′ 22″ d'excès sur la véritable), &c. Ces erreurs qui résultent de celles des observations sont, dis-je, légeres.

Mais il n'en seroit pas de même, si les observations des hauteurs péchoient l'une par excès, l'autre par défaut, ce qui est fort possible. Mettons seulement que l'une est trop foible, & l'autre trop forte de six minutes, ce qui n'est pas la moitié de toute l'erreur à laquelle on est exposé en mer, selon M. Bouguer, & supposons, par exemple, que c'est la premiere observation qui est foible, c'est-à-dire, qu'elle est de 36° 47′, dont le complément est 53° 13′, & que l'autre hauteur est réputée de 45° 59′, dont le complément est 44° 1′. On trouve pour l'angle putatif *ZEE′* de l'arc *EE′*, avec l'azymuth du Soleil au mo-

ment de la premiere observation 46° 8′ environ ; ainsi l'angle putatif *PEZ* de cet azymuth du Soleil avec son cercle horaire, est de 42° 4′ ; & on trouve ensuite pour l'angle horaire putatif *EPZ*, au moment de la premiere observation, 50° 40′ (c'est près de 30′ de degré, ou bien deux minutes d'heure d'excès sur le véritable) ; pour la hauteur putative du pole 46° 4′ 35″ (c'est 40′ 35″ de différence par défaut d'avec la vraie) ; pour l'angle azymuthal putatif du Soleil au moment de la premiere observation, 69° 41′ (c'est 54 minutes d'excès sur le véritable) ; pour l'autre angle azymuthal, 54° 34′ (c'est 66′ 38″ d'excès sur le véritable) ; enfin pour l'angle des deux azymuths du Soleil 15° 7′, (c'est 12′ 38″ de différence par défaut du véritable : cette erreur est à peu près la même que la somme des deux erreurs commises sur les hauteurs. Quant aux erreurs sur les angles azymuthaux, je ne peux m'empêcher de remarquer en passant, qu'elles sont très considérables par rapport à celles qui les produisent, & qu'il est étonnant qu'on ait proposé un cas où l'on seroit exposé à de telles erreurs, surtout depuis l'édition du beau Mémoire de M. Bouguer, sur la méthode d'observer en mer la déclinaison de la Boussole, qui est de 1731. Ce Sçavant prétend, Art. dernier de cette Piece, qu'*en déterminant les endroits du ciel où doivent être les astres, lorsqu'on veut découvrir en mer la variation de la Boussole, par une seule observation, il marque aussi assez les endroits qu'il faut préférer, lorsqu'on en emploie plusieurs.* Et il ajoûte cet avis, sçavoir, qu'*on multiplie quelquefois mal-à-propos le nombre des observations, sans penser que c'est presque toujours* *

* Ce mot, *presque toûjours*, est peut-être excessif, à moins que l'Auteur ne parle d'observations faites en divers tems, car en multipliant les observations contemporaines, & les réunissant, la conséquence de leurs erreurs doit ordinairement être plus légere [Au reste, M. B. n'a peut-être pas marqué suffisamment, comme il l'avance, tous les endroits du ciel avantageux pour la détermination

multiplier les occasions de se tromper; c'est-à-dire, comme je l'entens, *sans penser* qu'on peut les combiner d'une maniere désavantageuse, & de grande conséquence. C'est justement ce qui est arrivé dans le Mémoire cité de 1736.)

Il en seroit à peu près de même, si on supposoit au contraire la premiere observation trop forte de six minutes, & la deuxieme trop foible de la même quantité; c'est-à-dire, celle-là de 36° 59′ (compl. 53° 1′), & celle-ci de 45° 47′ (compl. 44° 13′) : car on trouve dans ce cas, pour l'angle putatif, *ZEE′* 47° 59′ 18″, 16; ainsi l'angle putatif *PEZ*, vaut 40° 12′ 41″, 84 : & l'on a pour l'angle horaire putatif au moment de la premiere observation, 49° 38′ 27″, 5, angle différent du vrai d'environ 31′ 37″, ou de 2 minutes 6″ 28‴ de tems par défaut; & pour la hauteur putative du pole, 47°. 24′ 20″, hauteur qui excede la vraie de 39′ 40″, &c.

Pour donner un bon exemple de détermination des trois choses proposées dans le Mémoire cité, il eût fallu combiner deux observations, l'une faite vers midi, & l'autre environ six heures 53′ 40″ du matin, ou 5 heures 6′ 20″ du soir, momens où le Soleil passe au premier vertical, & se trouve à 19° 10′ de hauteur, lorsque sa déclinaison est de 13° 50′, & la hauteur du pole de 46° 45′, comme il a été supposé ci-dessus. Car quelque fût la

de l'angle azymuthal, dans le cas où l'on a besoin de deux observations; ou du moins quelqu'un pourroit ne pas assez pénétrer cette conséquence de sa doctrine, & se méprendre : car il est avantageux pour la détermination de l'angle azymuthal, par une seule observation de hauteur, que l'astre soit voisin du premier vertical; ainsi quelqu'un pourroit penser qu'il est avantageux aussi pour la détermination de cet angle de combiner deux observations de hauteurs prises dans le voisinage du premier vertical, mais c'est tout le contraire; la combinaison de ces observations seroit dangereuse, quoique chacune soit favorable en particulier; c'est ce qu'on peut voir en prenant le résultat de la derniere hypothese de ce Chapitre. Une bonne combinaison pour la recherche dont il s'agit, lorsqu'on a une observation de hauteur auprès du premier vertical, est d'y en joindre une prise auprès du méridien, &c.

combinaiſon des erreurs des deux obſervations, l'erreur qui en réſulteroit ſur l'angle horaire, ne ſeroit que d'environ 8′ 46″ de degré, ou de 35″ 4‴ d'heure, l'obſervation du Soleil auprès du premier vertical, étant ſuppoſée ſeulement erronée de 6 minutes, comme ci-devant, &c.

Peut-être dira-t-on que l'intervalle des obſervations qui excede 5 heures dans cette derniere hypotheſe, eſt trop conſidérable, & que non-ſeulement la déclinaiſon du Soleil varieroit ſenſiblement dans cet intervalle, mais que le vaiſſeau pourroit faire beaucoup de chemin, ſoit en longitude, ſoit en latitude, ce qui altere une ou pluſieurs circonſtances du Probleme, &c. (c'eſt apparemment par cette conſidération, que dans le mémoire cité on n'a mis qu'une heure d'intervalle entre les deux obſervations). Je réponds ſur cela, 1°. Que je ne conſeille pas abſolument de combiner des obſervations faites en des momens éloignés, je ne le fais que pour le cas où il n'y a qu'un ſeul aſtre qui ſe préſente à l'Obſervateur, & où il y a pluſieurs choſes à déterminer. 2°. Je remarque qu'il eſt aiſé d'avoir égard aux altérations cauſées par le mouvement du vaiſſeau, pourvû qu'on ſçache à peu près la direction & la longueur de ſa route, &c. 3°. Si l'on ne veut pas entrer dans cette diſcuſſion, on peut ſe contenter de chercher une ſeule de ces choſes à la fois, l'heure, ou la hauteur du pole, en ſe fondant ſur une obſervation favorable à cette choſe, & ſur la connoiſſance qu'on a de l'autre par eſtime. 4°. Enfin, ſi le Navigateur ſe défie trop de ſon eſtime, & qu'il veuille ne mettre qu'un petit intervalle entre les deux obſervations de hauteur, néceſſaires pour déterminer ou l'heure, ou la hauteur du pole, il faut qu'il choiſiſſe pour ces obſervations, des endroits du ciel moins éloignés du premier vertical, ou du méridien, que dans l'hypotheſe du Mémoire de 1736.

Pour trouver l'heure, par exemple, il faut prendre chacune des hauteurs du Soleil, lorsqu'il est dans un azymuth le plus voisin qu'il se peut du premier vertical, en laissant un intervalle raisonnable entre les deux observations; c'est-à-dire, qu'il faut prendre une des hauteurs avant que le Soleil arrive au premier vertical, & l'autre après qu'il y a passé. Supposons en conséquence de cette proposition, que le Navigateur étant, par la même latitude (46° 45′), & le Soleil à la même déclinaison que ci-dessus, cet astre soit observé à six heures & demie, & à sept heures & demie précises du matin (c'est le même intervalle que ci-dessus), les deux hauteurs en ces deux momens doivent être 15° 7′ 44″, 7 & 25° 23′ 19″.

Or, si les deux observations pechent en même sens; c'est le cas où l'erreur qui en résultera sur l'angle horaire sera la plus grande, mais peu considérable cependant. Supposons, par exemple, les deux observations trop foibles chacune de six minutes, c'est-à-dire, que la premiere hauteur est réputée de 15° 1′ 44″, 7, dont le compl. est 74° 58′ 15″, 3; & l'autre de 25° 17′ 19″, dont le compl. est 64° 42′ 41″, on trouve pour l'angle putatif *PEZ*, au moment de la premiere observation, 44° 42′ 11″,44; & pour l'angle horaire putatif, au même moment, 82° 39′ 10″, angle qui excede le véritable de 9′ 10″, ou bien de 39″ 40‴ de tems. Cette erreur n'est que de très-peu plus grande que celle qui se trouve dans la combinaison d'une observation faite au passage même par le premier vertical, avec une observation de hauteur méridienne.

Supposons enfin que les deux observations pechent en sens contraires; que la premiere hauteur est réputée, par exemple, trop petite, & la deuxieme trop grande, c'est-à-dire, que celle-là est réputée de 15° 1′ 44″,7

(compl. 74° 58′ 15″,3), & l'autre de 25° 29′ 19″, dont le compl. eſt 64° 30′ 41″, on trouve pour l'angle putatif *ZEE′*, au moment de la premiere obſervation 42° 24′ 18″,72, ainſi l'angle putatif *PEZ* de l'azymuth du Soleil, avec ſon cercle horaire en ce moment eſt de, 45° 47′ 41″,28; & on trouve pour l'angle horaire putatif *EPZ*, au même moment, 82° 27′ 55″,3, angle qui differe du vrai de 2′ 4″,7 par défaut, ce qui réduit en tems, ne revient qu'à 9″ 19‴, au lieu que dans la même combinaiſon d'erreurs des hauteurs, pour le cas du Mémoire de 1736, il réſulte 2 minutes, ou 120″ d'erreur ſur l'heure. On peut conclurre de ces derniers calculs, qu'une demi-heure d'intervalle entre les deux obſervations ſeroit encore ſuffiſante, pourvû qu'on prît les deux hauteurs des deux côtés du premier vertical. Je dis *ſuffiſante* pour la détermination de l'heure ſeulement, car on n'auroit qu'une détermination très-vicieuſe de la hauteur du pole, & de l'angle azymuthal par conſéquent, lorſque les deux obſervations pecheroient en ſens contraires.

Au reſte, on doit voir par ces exemples, *quelle* eſt la bonne maniere de trouver l'heure pendant le jour, lorſque le Soleil décline du côté du pole élevé, & qu'il eſt le ſeul aſtre viſible, principalement ſi l'horiſon eſt couvert par quelque brouillard, qui ne permette pas d'obſerver le lever ou le coucher de cet aſtre : car quand l'horiſon ſera net, on pourra encore prendre l'obſervation du lever ou du coucher du Soleil (ou plutôt celle du moment où ſon bord inférieur touche l'horiſon ſenſible), au lieu d'une obſervation de ſa hauteur lorſqu'il eſt auprès du premier vertical, parce que l'erreur propre à la premiere eſpece d'obſervation eſt moins grande, que celle à quoi eſt ſujette une obſervation de hauteur, & la conſéquence de celle-là ne ſera pas plus grande, que la conſéquence de celle-

ci, si ce n'est que la déclinaison du Soleil & la hauteur du pole fussent grandes.

Lorsque le Soleil décline du côté du pole abbaissé, & qu'il n'y a pas d'autre astre qui paroisse conjointement, c'est son lever ou son coucher qu'il faut, s'il est possible, observer par préférence, pour la détermination de l'heure; tout autre tems est moins favorable pour cette détermination par une observation de hauteur du Soleil, parce que cette observation seroit plus fautive, & que la conséquence de son erreur seroit plus grande. Et si l'horison est occupé par un brouillard, il faut observer le Soleil à la moindre hauteur qu'on pourra. Dans l'intervalle entre la premiere & la derniere apparition du Soleil, il faudra s'en rapporter à une montre réglée sur la meilleure observation précédente. Cependant, si l'on étoit dans une région où la déclinaison de la Boussole eût certaine constance, on pourroit, après l'avoir vérifiée par la meilleure & la plus récente observation, tenter encore vers midi d'observer l'angle azymuthal du Soleil, à l'aide de cet instrument, dans ce même cas de la déclinaison du Soleil du côté du pole abbaissé.

Quant au tems des crépuscules, il ne sera pas rare, si le ciel est serain, de découvrir alors quelques Planetes, & même plusieurs étoiles de la premiere grandeur, & ces astres pourront être dans une position avantageuse pour l'invention de l'heure. Mais de quelle méthode se servira-t-on dans ce cas, ainsi que pendant la nuit? C'est de quoi je vais traiter dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE II.

Du choix entre les différentes méthodes, ou especes d'observations qui peuvent servir à trouver l'heure.

SI tous les avantages possibles se trouvoient réunis dans une seule méthode, le choix dont il s'agit ne seroit pas long à faire, & demanderoit peu de discussion: cette méthode mériteroit sans doute une préférence entiere & absolue. Mais les avantages paroissent dispersés; telle méthode en a, ou paroît en avoir un, qui manque d'un autre: on ne peut donc, ce semble, établir de préférence générale & sans exception, & il y a lieu à quelque discussion, s'il faut péser & comparer les diverses qualités des différentes méthodes, & y assigner des rangs.

On peut regarder comme les deux principales especes d'observations, celle de prendre les hauteurs des astres, & celle d'en observer une couple à son passage par un même vertical, ce sont au moins les deux especes les plus familieres, & il est aisé de voir ce que les autres especes ont de commun avec celles-là. Or la premiere a cet avantage, par exemple, que l'on peut absolument l'employer en tout tems où les astres sont visibles, & qu'on peut profiter d'un instant rapide, où quelque astre perce au-travers d'un nuage; mais aussi cette méthode requiert un instrument, & elle est difficile à exécuter pendant la nuit, surtout lorsqu'on ne découvre pas l'horison.

D'un autre côté, l'observation de deux astres à leur passage par un même vertical, a ce petit inconvénient, qu'on ne peut la faire en tout tems où les astres paroissent; il faut,

il faut, à l'égard de chaque couple d'astres, attendre certain moment, & on peut le manquer par quelque hasard : mais aussi en récompense, *cette opération se peut faire facilement sur mer*, s'il en faut croire M. de Maupertuis, *pag.* 62 de l'Astronomie Nautique, *& n'a besoin d'aucun instrument ; car*, ajoûte-t-il, *on ne peut pas appeller un instrument, un fil chargé d'un plomb, qui est tout ce qu'il faut pour la faire.* Et dans sa Préface, *pag.* xxxij, M. de Maupertuis met cette observation de deux astres dans un même vertical, après celle du lever ou du coucher d'un astre, & avant toute autre, quant à la *simplicité* & la *facilité*, insinuant au reste qu'on peut la faire avec *précision* & *exactitude*, même sur mer. *Sur la mer*, dit-il, page suivante, *un fil chargé d'un plomb suffit.* A quoi il ajoûte, que *si l'on vouloit se contenter d'une moindre exactitude, on pourroit, à la vûe simple, juger assez juste, si la ligne qui joint deux étoiles est verticale, surtout si l'on choisissoit deux étoiles assez éloignées l'une de l'autre.* L'autorité de M. de Maupertuis est grande assûrément, mais elle se trouve balançée, il faut l'avoüer, & un peu affoiblie peut-être, par celle d'un autre Sçavant, non moins versé dans l'Astronomie, lequel a blâmé la méthode dont il s'agit. Ce Sçavant est M. Bouguer ; je rapporterai son jugement plus bas.

Il est à propos, avant que d'entreprendre un examen régulier & pleinement décisif, des qualités des différentes especes d'observations, de faire quelques remarques.

1°. Quoique ces différentes especes puissent être inégales en mérite absolu, cette inégalité, quant à plusieurs, ne va pas, selon mon estime, à un bien haut point, à un point tel que l'égalité de mérite relatif aux circonstances ne puisse se retrouver entre ces méthodes, & que celle même qui seroit moins bonne absolument, ne puisse prévaloir à raison des circonstances, sur une meilleure.

2°. L'occasion de mettre en pratique la préférence que quelque méthode pourroit mériter sur les autres, en parité de circonstances, ne se présentera pas toûjours; elle ne peut gueres se trouver, cette occasion, que pendant la nuit, encore ne se présentera-t-elle pas à chaque moment: car les circonstances ne peuvent pas être toûjours favorables à l'usage de chaque méthode, il n'y en aura qu'une pour l'ordinaire à employer en tel ou tel moment, sçavoir celle qui conviendra le mieux aux circonstances présentes, & qui méritera à cet égard la préférence actuelle sur une autre méthode, qui seroit meilleure en parité de circonstances.

Le Navigateur doit donc être en état de faire usage de plus d'une méthode; il faudra qu'il emploie tantôt l'une, tantôt l'autre, suivant l'occurrence: il sçaura, s'il est intelligent & attentif, tirer bon parti de la plûpart des especes d'observations, recherchant toûjours la circonstance la plus avantageuse pour chaque méthode, il saisira la premiere qu'il trouvera de cette qualité, & rarement il manquera d'en trouver quelqu'une, parce que la position des astres qui est la plus désavantageuse pour une méthode, est favorable pour une autre.

Par exemple, lorsque la hauteur du pole étant connue, on demande l'heure, s'il se présente un astre auprès du premier vertical, il vaudra mieux pour la détermination requise, prendre la hauteur de cet astre, que d'attendre le passage d'une couple d'astres à un même vertical, si ce vertical fait un grand angle avec le méridien, ou si ces astres sont peu éloignés l'un de l'autre. Et lorsqu'on demande conjointement la hauteur du pole, & l'heure, s'il se trouve deux astres dont les azymuths fassent un angle droit ou approchant, il est à propos de prendre les hauteurs de ces deux astres, ce qui est la matiere du Pro-

bleme second, surtout si l'un est voisin du méridien, &c. Si au contraire, deux astres assez différens en hauteur, se trouvent en des azymuths très-obliques l'un à l'autre, il est à propos d'observer l'angle de ces azymuths, & la hauteur d'un des astres, ce qui est la matiere du Probleme XVII. surtout si les astres sont fort voisins du premier vertical, ou du méridien. Et dans le cas où, sans connoître suffisamment la hauteur du pole, on demanderoit seulement l'heure, si deux astres se trouvoient pareillement en des azymuths très-obliques l'un à l'autre, & au premier vertical, il ne faudroit pas négliger de prendre leurs hauteurs, & d'opérer suivant le Probleme second, &c.

3°. Si les circonstances sont parfaitement favorables au même moment, ou en des momens peu éloignés, à des procédés différens, par exemple, à quelqu'un de ceux où l'on se fonde sur l'observation de la hauteur d'un astre, & à quelqu'un de ceux où l'on se sert du passage de deux astres à un même vertical; au lieu de choisir entre ces différens procédés, & d'en laisser un, il paroît à propos de les employer conjointement: car on aura ce qui est désiré avec plus de sûreté, si leurs résultats sont conformes, ou avec moins d'erreur présomptive, en prenant un milieu entre ces résultats, s'ils sont différens.

On pourroit, ce semble, sur ces considérations, se dispenser de peser exactement les qualités des divers procédés: cependant comme l'intention de l'Académie paroît être que l'on porte la discussion jusqu'à assigner une maniere de trouver l'heure pendant la nuit, meilleure que toute autre, au cas qu'il y en ait une; comme cette discussion est d'ailleurs curieuse; enfin comme il faut du moins montrer sur quoi est fondée l'estime qui me fait dire, que l'inégalité de mérite entre divers procédés en

parité de circonſtances, ne ſçauroit être que médiocre; je vais tenter la recherche de l'erreur à laquelle on peut être expoſé, en croyant ſaiſir une couple d'aſtres à leur paſſage par un même vertical; car c'eſt cette erreur qu'il faut comparer avec celle à quoi eſt ſujette l'obſervation de la hauteur d'un aſtre, pour connoître ſi l'une de ces obſervations prévaut ſur l'autre, & je me bornerai à cet eſſai.

J'ai rapporté le témoignage de M. de Maupertuis, en faveur de l'obſervation de deux aſtres dans un même vertical, par le moyen d'un fil à plomb: mais le jugement de M. Bouguer ſur cette pratique eſt bien différent, on ne peut le diſſimuler. M. Meynier l'avoit propoſée dans une addition à ſon Mémoire ſur la maniere d'obſerver en mer la déclinaiſon de la Bouſſole, *pag. 62*, & il l'avoit *limitée* à l'obſervation de l'étoile polaire, avec quelqu'une de celles qui l'environnent, à peu près comme il eſt enſeigné dans le livre de la Connoiſſance des Tems. Ainſi M. Meynier avoit ſaiſi une des circonſtances favorables à cette eſpece d'obſervation, puiſque le vertical de l'étoile polaire n'eſt jamais fort écarté du méridien, à moins que le pole ne ſoit bien haut. * Cependant M. B. a blâmé rudement ce procédé dans ſes remarques ſur le Mémoire cité. » M. Meynier ſupplée (dit-il *pag. 5*) une ma- » niere de trouver l'heure dans l'addition qu'il a miſe après » coup à ſon Mémoire: mais il veut qu'on ſe ſerve pour » cela d'un fil à plomb, ne ſe reſſouvenant pas d'en avoir

* Au reſte, M. Meynier prétendoit découvrir l'heure par cette obſervation, ſans calcul, à l'aide de je ne ſçai quel planiſphere qu'il a imaginé, & indépendamment de la différence des hauteurs du pole pour les différens lieux; & à cet égard il ſe trompoit lourdement. Mais M. B. qui dit n'avoir pas voulu rapporter toutes les *mépriſes* de M. Meynier, mais ſeulement *celles qui tirent le plus à conſéquence, & qui ſe préſentent les premieres*, a négligé de relever cette faute, & il ne traite la pratique dont il s'agit d'*imparfaite*, qu'à raiſon *de l'agitation continuelle du vaiſſeau*, laquelle doit cauſer des oſcillations irrégulieres, au fil chargé d'un plomb.

» rejetté l'usage auparavant, à cause de l'agitation conti-
» nuelle du vaisseau. Or, un moyen *si imparfait* de trou-
» ver l'heure (ajoûte M. B.), fera qu'on se trompera *au*
» *moins de* 15 *ou* 20 *minutes de tems*, ce qui produira en
» suite des erreurs excessives dans l'azymuth ». Quinze ou 20′ de tems, répondent à 4 ou 5 degrés, erreur bien considérable sur l'angle horaire, si l'on y étoit effectivement exposé. D'ailleurs M. B. approuve, *page suivante*, & veut même qu'on détermine l'angle horaire d'un astre par l'observation de sa hauteur.

Voilà, je le répete, un jugement bien différent de celui de M. de Maupertuis. Et quel parti doit prendre dans un cas de cette espece, une personne dont les lumieres sont aussi bornées que les miennes, & si inférieures à celles des Sçavans qui se contrarient ?

Non nostrûm inter vos tantam componere pugnam.

Ces Messieurs sont plus capables que qui que ce soit, de discerner le point qui doit les concilier ; & j'aimerois beaucoup mieux attendre le jugement réfléchi porté par l'un ou par l'autre, que de le prévenir. Si j'ose parler sur ce sujet, ce n'est qu'avec répugnance, & à cause de la nécessité que paroît imposer l'énoncé du Programme de l'Académie. S'il faut donc que je m'en explique, je dirai, avec la permission de ces Messieurs, qu'on peut, ce semble, user de tempérament, & prendre un certain milieu entre les deux extrémités. L'observation de deux astres dans un même vertical, n'est peut-être pas susceptible d'autant d'*exactitude*, que l'insinue M. de Maupertuis ; d'un autre côté, je ne la crois pas sujette à autant d'*imperfection* que l'a avancé M. Bouguer. Je pense que cet Auteur, si judicieux ailleurs en tout, a été un peu trop loin à cet égard : c'est en passant, c'est dans un écrit fait

pour repouffer un aggreffeur téméraire, dans un écrit composé peut-être avec quelque précipitation, que M. Bouguer a blâmé la méthode dont il s'agit. On peut donc foupçonner qu'il s'y eft un peu laiffé emporter par l'ardeur polémique.

Venons au fait. Nous avons vû que l'erreur dE fur l'heure, eft $= \frac{r}{c} dH$, lorfqu'on la détermine par la hauteur d'un aftre fitué fur le premier vertical, ce qui eft la pofition la plus favorable pour cette détermination. Suppofons pareillement que les deux aftres E, E', qu'on prétend obferver dans un même vertical, font fitués le plus avantageufement à l'égard du méridien, pour la même détermination, c'eft-à-dire, que E l'un des deux aftres, eft fur le méridien même véritable zPE, ou PzE, *Fig.* 37 & 38.

1°. C'eft avec un fil chargé d'un plomb, que l'on propofe de faire l'obfervation dont il s'agit, mais ce fil ne doit pas être extrêmement délié, il doit du moins être vifible, il faut qu'il ait par conféquent certaine épaiffeur (auffi quelques-uns propofent-ils de prendre une ficelle). Ainfi lorfqu'on regarde ce fil, les deux plans de rayons vifuels qui en rafent les côtés, font un certain angle qui eft différent, felon que le fil eft plus ou moins éloigné de l'œil. Soient l'arc qui eft la mefure de ce petit angle, & fon finus, nommés dM, dans le cas où l'on auroit placé ce fil à la diftance de l'œil la plus convenable OH, *fig.* 52 pour y vifer felon une ligne horifontale. Si l'on veut donc vifer à ce fil felon une ligne OB, oblique à l'horifon, pour l'ajufter fur un objet élevé E', il me femble qu'il faut placer ce fil plus près de l'œil, comme en BC, le placer, dis-je, plus près de l'œil dans le fens horifontal, en raifon du finus OC du complément de la hauteur de l'objet E',

au rayon OH, afin qu'il y ait même distance de l'œil à la partie du fil B, ajustée sur l'objet, que dans le cas où on viseroit horisontalement au fil. Ainsi l'angle des deux plans de rayons visuels qui rasent les deux côtés du fil, a pour mesure, & pour sinus $\frac{r}{k'} dM$, k' étant le cosinus de la hauteur de l'objet E'. Soit donc cet angle réprésenté, *Fig.* 37 & 38, par l'angle sphérique mzm', compris entre les deux quarts-de-cercle zm, zm', car il peut arriver qu'au moment où l'on croira le fil bien ajusté sur les deux astres, un d'entre eux réponde à un des côtés du fil, & l'autre astre à l'autre côté, en sorte que la ligne $EE'Z$ qui joint les deux astres, & renferme le zénith putatif Z, soit oblique au fil.

Et je ne crois pas même qu'on puisse sauver ou diminuer cet inconvénient, en affectant d'employer un fil très-délié, ou d'éloigner beaucoup le fil de l'œil; car on seroit alors exposé, ce me semble, à une illusion équivalente, qui seroit de juger les deux astres bien répondans au fil, en quelque moment où le fil seroit réellement entre deux, & à quelque distance des principaux rayons visuels, dirigés à l'un & à l'autre. Une cause suffisante pour cela, outre celles que je toucherai plus bas, c'est qu'on ne peut pas voir, comme chacun le sçait, en même tems d'une vûe distincte, deux petits objets situés à des distances très-différentes de l'œil, tels que sont le fil & quelque astre: car si l'on veut voir distinctement le fil, l'astre paroîtra double, & si c'est l'astre, qui, comme l'objet le plus éclatant, attache le plus la vûe, c'est le fil qui paroîtra double ou confus. Le plus sûr est peut-être, que le fil employé pour l'observation, ait certaine grosseur, sçavoir telle qu'il puisse couvrir entierement l'astre le plus élevé.

2°. Il peut encore arriver qu'au moment où l'on croira

le fil bien à plomb, & les deux astres bien répondans au fil, ce fil soit incliné à la ligne verticale, en même sens que la ligne qui joint les deux astres est inclinée à ce fil même, ainsi qu'il est réprésenté, *Fig.* 37 & 38, où Σ est le vrai zénith, & Σm le vertical qui rencontre un des côtés du fil au point où il coupe l'horison, en sorte que l'angle $\Sigma m z$ est celui que fait le fil avec une ligne vraîment perpendiculaire. Je nomme le sinus de cet angle dI. En supposant donc PZ donné, & égal à peu près à $P\Sigma$, complément de la vraie hauteur du pole, le concours des accidens qu'on vient d'expliquer, peut faire que le zénith putatif Z se trouve éloigné du vrai zénith Σ, des deux petits arcs Σz, zZ; & PZ étant le méridien putatif, l'angle ΣPZ, qui répond au petit arc dE de l'équateur, est l'erreur sur l'heure.

Or, quand $\Sigma E'$, complément de la hauteur de l'astre supérieur, est considérable en comparaison de Σz, on peut regarder les deux arcs $\Sigma E'$, zE', comme égaux ou à peu près; à plus forte raison les deux arcs ΣE, ZE, sont aussi égaux entre eux. Cela posé, le triangle sphérique $mE\Sigma$, donne cette analogie: *Sin.* ΣE (k) : *sin.* Σm (r) :: *sin.* ΣmE (dI) : *sin.* ΣEm, ou $\Sigma Ez = \frac{r}{k}\, dI$. Le triangle sphérique zEE' donne cette autre analogie: *Sin.* EE' (δ): *sin.* zE' (k') :: *sin.* $\overline{E}zE'$ $\left(\frac{r}{k'}\, dM\right)$: *sin.* $zEE' = \frac{r}{\delta}\, dM$. Or l'angle ΣEZ étant la somme des deux petits angles ΣEz, zEZ, son sinus est à peu près égal à la somme des sinus de ces angles partiels; & le triangle sphérique PEZ donne enfin cette analogie: *Sin.* PZ (c) : *sin.* ZE (k) :: *sin.* ΣEZ $\left(\frac{r}{k}\, dI + \frac{r}{\delta}\, dM\right)$: *sin.* EPZ ou ΣPZ $= dE = \frac{r}{c}\left(dI + \frac{k}{\delta}\, dM\right)$.

Telle

Telle eſt l'erreur qui peut réſulter ſur l'heure, des deux cauſes que j'ai marquées. Et cette formule, où il reſte à déterminer dI & dM, donne déja la confirmation de ce que j'ai dit ci-deſſus, ſçavoir que l'aſtre ſupérieur doit être fort haut, & que l'aſtre inférieur doit être fort bas, à moins que celui-là ne fût préciſément au zénith, ce qui n'eſt pas le cas le plus ordinaire : car tant que l'aſtre ſupérieur ſera ailleurs qu'au zénith, le ſinus δ de la diſtance des deux aſtres, ſera moindre que le coſinus k de la hauteur de l'aſtre inférieur ; ainſi la fraction $\frac{k}{\delta}$ ſera d'autant plus petite, que ces quantités ſeront ſinus de plus grands arcs. On voit de plus, qu'il eſt à peu près indifférent que les deux aſtres ſoient du côté du zénith où eſt le pole élevé, ou qu'ils ſoïent du côté oppoſé. Il paroît encore (& cela ſuit auſſi du principe général poſé ci-devant) que lorſqu'on veut obſerver l'étoile polaire dans un même vertical, avec quelqu'une de celles qui l'environnent dans les conſtellations de la grande Ourſe, du Dragon, de Caſſiopée, &c. il vaudroit mieux, ceſſant la difficulté que j'indiquerai bientôt, obſerver l'étoile polaire avec quelqu'une de ces étoiles, lorſque celle-ci eſt ſupérieure à la polaire, que lorſqu'elle eſt au-deſſous, car la fraction $\frac{k}{\delta}$ eſt plus petite dans le premier cas que dans le ſecond.

Il reſte, dis-je, à déterminer, ou plutôt à eſtimer les quantités dI & dM : mais il reſte auſſi deux cauſes d'erreur à conſidérer, & il faut peut-être joindre l'effet d'une de ces cauſes à dI. Cette cauſe eſt celle qui a ſingulierement frappé M. Bouguer, je veux dire les oſcillations du fil, provenantes de l'*agitation continuelle du vaiſſeau*, oſcillations, il faut l'avoüer, incommodes & très-nuiſibles : car non-ſeulement elles peuvent faire que le fil ſoit

incliné en quelque instant où on le croira dans la position verticale, ce qui est l'erreur dont j'ai déja fait état, erreur qui naît de l'irrégularité à laquelle M. B. prétend que les oscillations d'un pendule sont sujettes sur mer, mais encore elles rendent difficile l'application du fil aux deux astres. A l'égard de l'astre supérieur, le mieux qu'on puisse faire pour y ajuster le fil, c'est de viser à cet astre par une partie du fil qui soit fort voisine de son point de suspension, encore pourra-t-on manquer de tems en tems cette jonction, à cause des secousses du vaisseau, pendant qu'on attendra le moment requis du passage de l'astre *inférieur*. Et à l'égard de celui-ci, les oscillations du fil feront nécessairement qu'il paroîtra tantôt à sa droite, tantôt à sa gauche, en sorte qu'il faudra prendre pour le moment du passage de l'astre par le fil, celui vers lequel les excursions du fil de part & d'autre de l'astre seront jugées égales. Or c'est en quoi il est facile de se méprendre, & ce qui suppose d'ailleurs que le fil répond toûjours à l'astre supérieur.

L'autre cause d'erreur a lieu dans le cas où *la distance* des deux astres qu'on prétend observer dans un même vertical, excede certain terme qui est d'environ 15 degrés: & ce cas est cependant celui que l'on doit rechercher, ainsi que je l'ai démontré plus haut, sans quoi l'erreur $\frac{k}{y} dM$ pourroit être considérable, quoique la quantité dM le fût peu. Cette cause consiste en ce que l'on ne peut voir en même tems d'une vûe distincte, deux objets qui font à l'œil un angle au-dessus d'une certaine quantité;* mais si l'on a jetté d'abord un regard juste sur un de ces

* C'est un fait assez connu, sur-tout par les Marins. Cela les empêche de prendre la hauteur des étoiles avec l'Arbalestrille ou le Quartier-Anglois, lorsqu'elles sont fort élevées, & ils en regardent l'observation comme incertaine, quand l'astre est élevé d'environ 20 degrés.

objets, il faut mouvoir l'œil au moins, pour voir ensuite l'autre objet de la même maniere. Or, il peut arriver pendant ce mouvement & changement de direction de l'œil, que le fil par lequel on doit mirer soit un peu déplacé. Bien plus, si les deux astres sont fort distans (ce qui est d'ailleurs le plus avantageux), il faudra mouvoir la tête même de haut en bas, & de bas en haut, pour porter la vûe successivement & alternativement sur chacun des astres, parce que le jeu de l'œil dans son orbite, est assez borné: or, sans parler de la gêne qu'il y a à renverser la tête, il peut arriver que pendant sa conversion dans le sens vertical, elle se jette un peu à droite ou à gauche de sa situation précédente, & que l'œil se trouve par conséquent dans un autre vertical avec le fil, quand même ce fil seroit fixe.

Cette derniere cause d'erreur me paroît assez considérable, & je pense qu'il est à propos de chercher le moyen de s'y soustraire, en faisant l'observation dont il s'agit. Je proposerai une idée sur cela dans le Chapitre suivant: je souhaite qu'elle soit praticable, & qu'elle ne ramene point d'inconvénient, au lieu de celui que je veux supprimer.

Pour revenir aux autres causes d'erreur, je ne crois pas qu'on puisse s'en garantir entierement sur mer, mais je ne suis pas en état de faire une estime précise de leur effet: je la laisse à ceux qui connoissent la mer par expérience. Je dirai seulement que si l'on parvient à éviter la derniere erreur que j'ai marquée, l'observation du passage de deux astres par un même vertical, prévaudra, ce me semble, sur une observation de hauteur. Au reste, je ne vois pas que la premiere espece d'observation puisse excéder extrêmement la seconde en mérite; car pourquoi l'observation de la hauteur de quelque astre est-elle fautive sur mer,

ſurtout la nuit, & lorſqu'on ne voit pas l'horiſon ? C'eſt, 1°, parce qu'il faut viſer à l'aſtre par des pinnules qui doivent avoir quelque grandeur, & parce que l'inſtrument peut être fautif. C'eſt, 2°, parce que cet inſtrument n'eſt pas juſtement à plomb, ou bien parce que le pendule qu'on y applique pour montrer la ligne verticale, ſouffre des oſcillations : & ne retrouvons-nous pas de pareilles ſources d'erreur dans l'obſervation de deux aſtres à leur paſſage par un même vertical ? Enfin, ſi la hauteur d'un aſtre eſt difficile à prendre lorſqu'elle change ſenſiblement, pareille difficulté ne ſe rencontre-t-elle pas dans l'obſervation dont il s'agit, lorſqu'on veut ſaiſir la circonſtance la plus favorable à la détermination de l'heure, puiſque l'angle des azymuths des deux aſtres change promptement dans cette circonſtance.

Il me reſte une remarque ſur la détermination de l'heure, qui trouve ici ſa place ; c'eſt que l'erreur dE qu'on peut commettre ſur l'heure, eſt d'autant plus grande que le pole eſt plus élevé. En effet, nous avons vû qu'en la déterminant par la hauteur d'un aſtre ſitué ſur le premier vertical, l'erreur $dE = \frac{r}{c}\, dH$; * & nous venons de voir $dE = \frac{r}{c}\left(dI + \frac{k}{\delta}\, dM\right)$, lorſqu'on détermine l'heure par l'obſervation de deux aſtres, dans un même vertical putatif, voiſin du méridien ; il eſt aiſé d'ailleurs de reconnoître que cette fraction $\frac{r}{c}$ doit entrer dans toute autre expreſſion de l'erreur dont il s'agit. Mais quant à la détermination de la hauteur du pole, l'erreur qui peut s'y gliſſer eſt la même, quelle que ſoit cette hauteur. Auſſi

* Je ſuppoſe dH conſtante, ou plutôt, comme il eſt vraiſemblable que cette erreur eſt plus grande à meſure que le pole eſt moins élevé, parce que la hauteur des aſtres change plus promptement, & eſt plus difficile à obſerver ; je ſuppoſe que dH ne croît pas en raiſon du coſinus de la hauteur du pole.

eft-il également important au Navigateur ; de connoître avec la même justesse sa latitude telle qu'elle soit, grande ou petite : mais il n'en est pas de même pour l'heure ; plus le pole est élevé, moins il est important de la bien connoître sur mer. Car si on la cherche pour découvrir la différence de la longitude du lieu où l'on est, & de celle du lieu d'où l'on est parti, il importe moins de se tromper dans l'estime de cette différence, à mesure que le pole est plus élevé, parce que le moyen parallele entre les deux lieux est d'autant plus petit. Et si c'est pour servir à trouver la variation de la Boussole qu'on veut sçavoir l'heure, il importe moins aussi de la bien connoître à cet égard, à mesure que le pole est plus haut. En un mot, en supposant que l'erreur dans la position du zénith putatif à l'égard du vrai méridien est constante, c'est-à-dire, que la distance du zénith putatif à ce méridien est constante, il résulte de-là, à la vérité, que l'erreur sur l'heure est inégale, selon que le pole est plus ou moins élevé : mais l'erreur sur l'arc du parallele où est l'Observateur, est à peu près la même en grandeur absolue, c'est-à-dire du même nombre de toises, en supposant la terre sphérique, & c'est à cette erreur que le Navigateur est, ce me semble, seulement ou principalement intéressé.



CHAPITRE III.

Des moyens de faire les observations qui servent à déterminer l'heure, &c.

§. I. *Des moyens de prendre la hauteur des Astres.*

LORSQUE l'horison est découvert, le Quartier Anglois est le meilleur instrument entre les anciens pour prendre la hauteur du Soleil : ce même instrument est encore propre pour observer la hauteur des astres qui ne jettent point d'ombre, s'ils sont peu élevés. Le nouvel instrument proposé par M. de Fouchy, dans les Mémoires de 1740, est très-propre dans le même cas de la visibilité de l'horison, pour montrer la hauteur quelconque de tout astre. Mais lorsque l'horison n'est pas visible, il faut employer un instrument qui prenne de lui-même sa situation, ou qui soit garni d'un pendule, pour marquer la ligne verticale.

Les instrumens de la premiere espece sont divers. On peut voir la description des principaux & plus commodes, dans le Mémoire de M. Bouguer, touchant la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres ; Piece qui a remporté le Prix de 1729.



§. II. *Des moyens d'observer deux astres à leur passage par un même vertical.*

LE moyen le plus simple est de se servir d'un fil à plomb. Ce moyen convient également à la circonstance où l'on ne voit pas l'horison, & à celle où il seroit visible : mais si l'on se trouve quelquefois dans celle-ci, on peut employer un moyen meilleur, en ce que l'on évitera l'incommodité des oscillations du fil à plomb. Il faut appliquer à une piece ajoutée, & garnie de deux pinnules, un fil, de maniere que l'angle de ce fil, avec la ligne qui passe par les pinnules, differe d'un droit, d'une quantité égale à l'inclinaison de l'horison visuel ; un Observateur y visera par les pinnules, en tenant le plan de l'instrument dans une position à peu près perpendiculaire au vertical où les deux astres doivent se rencontrer ; ainsi le fil sera dans ce même vertical, ou en sera extrêmement voisin, quand même il feroit un peu incliné à l'horison, conjointement avec le plan de l'instrument ; un second Observateur visera donc aux deux astres par ce fil.

J'ai déja remarqué qu'on ne peut viser directement du même coup d'œil à deux astres, lorsqu'ils sont éloignés. J'estime qu'il est à propos dans ce cas, de faire en sorte qu'on voie l'astre le plus élevé par réflexion, car le rayon réfléchi venant de cet astre, pourra être rendu fort voisin du rayon direct émané de l'autre. Soit *EO*, *Fig.* 53 ce rayon direct émané de l'astre inférieur ; *E'bO* le rayon direct qui iroit de l'astre supérieur à l'œil de l'Observateur ; *E'M* un autre rayon du même astre : ce rayon peut être renvoyé à l'œil de l'Observateur selon *MO*, de maniere que l'angle *EOM* soit fort petit : une petite piece *M* de miroir

plan, appliqué au fil, suffit pour cela. On donnera à cette piece une telle inclinaison à l'égard du fil, qu'elle en ait 30 ou 40 degrés à l'égard de l'horison; & en tenant le miroir un peu au-dessus ou un peu au-dessous du rayon visuel de l'astre inférieur, on y pourra voir un astre dont la hauteur soit depuis 50 environ jusqu'à 80 degrés.

Mais quoique les deux astres puissent être vûs ainsi sur une même ligne verticale, cela n'est pas suffisant pour en conclurre qu'ils sont réellement au même vertical, il faut encore que l'œil soit avec le fil, dans un plan perpendiculaire à la piece de miroir, & cela suppose deux choses, sçavoir 1°, qu'il y ait, par exemple, un second fil *b m*, combiné avec celui (*BM*) auquel est appliquée la piece de miroir, & qui soit tendu par le même poids, d'où il résultera que ces fils seront toûjours dans un même plan, & que ce plan affectera la situation verticale, soit que les fils soient paralleles ou non. 2°. Il faut que la piece de miroir soit rendue exactement perpendiculaire au plan des deux fils. Cela supposé, si l'œil de l'Observateur est placé maniere que l'un des fils paroisse couvrir l'autre, & que les deux astres y répondent, ils seront alors dans un même vertical.

Ce moyen, comme on le voit, n'est rien moins que simple. C'est un vrai instrument que l'assemblage du miroir & des deux fils, & il faudra, je l'avoue, beaucoup d'attention & de dextérité de la part du constructeur, pour rendre le miroir exactement perpendiculaire au plan des fils. Je ne m'arrêterai point sur la maniere d'y réussir, je dirai seulement que le miroir doit être placé à demeure, & que le fil qui en sera armé, doit être incapable de se tordre. Le plus sûr seroit d'employer une lame au lieu d'un fil. Au reste, pour faire servir le miroir à l'observation d'un astre plus ou moins élevé, il s'agira seulement d'incliner

d'incliner plus ou moins à l'horison le fil, ou plutôt la lame *BM* qui le portera. C'est ce qu'on exécutera aisément dans le besoin, en changeant l'application de cette lame au poids, ou autre corps qui tiendra le fil *b m* tendu, c'est-à-dire, en éloignant plus ou moins les extrémités inférieures de la lame & du fil, selon une droite tracée sur ce poids, sans changer la situation des parties supérieures.

Un autre moyen plus avantageux, mais de plus grand appareil, seroit de se servir de l'instrument proposé en 1740, par M. de Fouchy, pour observer la distance de deux astres, & pour quelques autres usages. Or pour mettre cet instrument à l'usage que j'entends, on y appliquera un fil garni d'un plomb : un Observateur soûtenant l'instrument, suivra les deux astres, & un autre Observateur remarquera le moment où le fil à plomb étant en repos, sera dans le plan de l'instrument, ou bien fera en oscillant des excursions à peu près égales de part & d'autre du plan de l'instrument : c'est en ce moment que les deux astres se trouveront au même vertical.

§. III. *Sur l'observation de deux astres dans un même almicantarath.*

CETTE observation est fort simple, fort facile, & fort juste sur mer, lorsque l'horison sensible est l'almicantarath commun des deux astres, & qu'il est découvert : mais cette observation cesse d'être simple, & devient difficile, lorsque les astres sont au-dessus de l'horison, il faut alors au Marin un instrument.

Le meilleur de tous pour ce cas, est encore, ce me semble, celui de M. de Fouchy, en y ajoûtant une piece particuliere, sçavoir une lame platte tournante sur un axe perpendiculaire au plan de l'instrument, lame

qui soit par conséquent toûjours perpendiculaire à ce plan: cette lame portera un fil à plomb. Comme l'angle que font les deux astres à l'Observateur, est connu par la distance des deux astres, qui est donnée par les tables, ou par l'instrument même dont il s'agit, on disposera la lame de maniere qu'elle divise cet angle par le milieu: un Observateur soûtenant l'instrument, suivra les deux astres, en les joignant dans sa lunette; ainsi le plan de l'instrument sera dans celui du grand cercle, qui passe par les deux astres (ou si ces deux plans sont inclinés l'un à l'autre, à cause des réfractions, ce sera dans un sens indifférent à l'observation désirée), & lorsque ces astres seront parvenus au même almicantarath, la lame perpendiculaire au plan de l'instrument, sera dans le plan du vertical équidistant des deux astres; un second Observateur remarquera ce moment, qui est celui où le fil à plomb étant en repos, se trouvera dans le plan de la lame, ou bien fera en oscillant, des excursions à peu près égales de part & d'autre de ce plan.

§. IV. *Sur l'observation de l'angle des azymuths de deux astres.*

Il est à souhaiter que cette observation, qui seroit utile sur mer, n'y soit pas impossible; mais elle paroît difficile, je l'avoue, lorsque la mer est agitée, & que l'horison n'est pas visible. Je n'ai rien de précis à proposer touchant la maniere de l'exécuter avec certaine justesse; & c'est ici que je sens le plus mon insuffisance & ma stérilité pour l'invention: mais il y a des génies capables d'y suppléer, & peut-être quelqu'un voudra-t-il bien se prêter à cette recherche, ou décider si l'on n'en doit rien espérer.

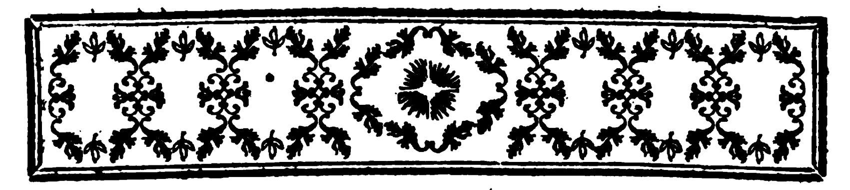
Pourroit-on employer un secteur de cercle suspendu de façon qu'il affectât la position horisontale par son propre poids? Au-dessus de cette piece seroient deux fils situés dans un même plan, & placés, sçavoir l'un au centre du cercle, perpendiculairement à son plan, & l'autre à sa circonférence, & au commencement de la division du limbe. Un Observateur dirigeroit le plan des deux fils à l'astre supérieur, en y visant par ces fils; un autre Observateur, tenant un fil à plomb auprès du limbe de l'instrument, viseroit à l'astre inférieur par ce fil, & par celui du centre du cercle; enfin ce même observateur, ou pour le mieux, un troisieme, remarqueroit le point moyen du limbe, auquel répondroit le fil à plomb, &c. Mais cette pratique seroit sujette à un inconvénient non leger, en ce que le principal instrument souffriroit des agitations, & le fil à plomb tenu par le deuxieme Observateur en souffriroit d'autres, ce qui ne permettroit peut-être pas de bien juger à quelle division du limbe le fil à plomb devroit être réputé répondre. *

Si cette observation n'est pas pratiquable sur mer,

* Si l'on réussit quelquefois à faire cette observation, il me reste à avertir que si l'on veut opérer ensuite graphiquement au Probl. XVII, il y a une précaution à prendre, lorsque l'angle des azymuths des deux astres est fort aigu. L'opération graphique a deux parties: la premiere consiste à former en particulier le triangle *EE'Z* par les élémens donnés, qui sont la distance des deux astres, & la hauteur de l'un d'eux, outre l'angle *EZE'* dont il s'agit; & par-là on détermine la hauteur du second astre, aussi-bien que l'angle *EE'Z*; l'autre partie de l'opération consiste à décrire ce même triangle *EE'Z* sur le planisphere, & c'est ce qu'on peut exécuter absolument par deux voies différentes, ainsi qu'il a été enseigné ci-dessus; mais l'une de ces voies est désavantageuse dans le cas marqué. Cette voie est de former le triangle *EE'Z* par le moyen de ses trois côtés. Or, comme l'angle *EZE'* est supposé fort aigu, en se trompant tant soit peu dans cette deuxieme partie de l'opération sur la grandeur de l'un ou de l'autre côté *EZ*, *E'Z*, on placeroit assez mal le point *Z*, & cela nuiroit ou à la détermination de l'heure, ou à celle de la hauteur du pole. Il faut donc, pour bien construire le triangle en question sur le planisphere, employer seulement l'autre procédé, c'est-à-dire, former ce triangle sur la base *EE'*, par le moyen du côté *EZ*, & de l'angle *EE'Z* adjacent à cette base, lequel a été déterminé par la premiere partie de l'opération. Quand on se tromperoit un peu sur cet angle, il n'en résulteroit qu'une petite erreur dans la position du point *Z*.

lorsque l'horison est couvert, on pourroit tenter d'y en substituer une autre, dont je n'ai pas encore parlé, sçavoir celle de l'inclinaison du grand cercle où sont situés les deux astres à l'égard de l'horison : car cet élément étant donné, avec la hauteur de l'un des astres, on en déduiroit aisément l'heure & la hauteur du pole. Au triangle sphérique ZEx, *fig.* 54. où Zx est le vertical qui rencontre le grand cercle $EE'x$ des deux astres à son intersection en x avec l'horison, on auroit l'angle ExZ, complément de l'inclinaison de ce cercle $EE'x$ à l'horison, le côté EZ opposé à cet angle, côté qui est complément de la hauteur observée, & le côté Zx qui est un quart-de-cercle : ainsi on auroit l'angle ZEE', auquel ce côté Zx est opposé par cette simple analogie ; *sin.* EZ : *sin. tot.* : : *sin.* ExZ : *sin.* ZEE' ; & on poursuivroit, comme il a été prescrit ci-dessus (Partie deuxieme) pour le second Probleme.





AVERTISSEMENT
ET
ADDITIONS

Pour une Piece intitulée : Essai d'Horolepse Nautique, *& marquée par ce vers :*

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri ;

Dont la premiere Partie a été présentée en 1744, *& cottée* N°. V, *&c.*

C'EST depuis le mois d'Août 1744, que j'ai composé la suite de cette Piece, & il m'en restoit une petite portion à faire à Pâques 1745 : mais j'ai achevé cet Essai dans la même disposition où je l'ai continué, c'est-à-dire, sans aucune vûe sur le Prix, ne sçachant pas même qu'il avoit été remis. Ç'a été seulement pour vuider ma tête d'un reste d'idées, en les consignant par écrit, que j'ai travaillé ; & j'ai simplement suivi mon premier plan, tel que je l'avois formé au hasard, faute d'avoir sçû démêler le vrai but de l'Académie. Enfin, j'avois envoyé à Paris, & fait présenter la continuation de ma Piece, lorsque j'ai reçu le nouveau Programme pour

1747, par lequel j'ai appris que *les moyens méchaniques les plus sûrs pour faire en mer les observations dont on peut conclurre l'heure, faisoient le principal objet de la question proposée en* 1743, ce qui est fort différent de la supposition sur laquelle j'ai travaillé : car quoique j'aie raisonné sur la maniere de faire les observations d'où on peut déduire l'heure, je n'ai pas considéré ce point comme mon capital, mais comme un accessoire qu'il me suffisoit d'effleurer. Je dois même déclarer qu'un tel sujet demandant, pour être traité pleinement & avec succès, un talent & des connoissances dont je me sens mal pourvû, je me serois entierement abstenu de toucher à la question de l'invention de l'heure en mer, si j'eusse bien connu d'abord l'intention de l'Académie. Que si je reviens aujourd'hui sur cette question, c'est plutôt pour avouer ma foiblesse, & pour rendre raison de l'état où est la partie de ma Piece, présentée depuis la remise du prix, que pour essayer de satisfaire au desir du nouveau Programme.

J'AI proposé au dernier Chapitre de ma *troisieme* Partie, d'employer un pendule pour connoître la situation de l'instrument quelconque, par lequel on tentera de faire une observation pour la détermination de l'heure, lorsque l'horison ne sera pas visible, & je n'ai rien dit de l'usage des niveaux à liqueur : mais j'ai vû depuis, dans les Transactions Philosophiques, de la traduction de M. de Bremont, que les anglois ont eû recours depuis quelques années, à ce moyen proposé autrefois en France, dans des assemblées qui se tenoient chez M.......... & dont la proposition a été renouvellée & fort recommandée par M. de Radouay, dans ses remarques sur la Navigation, imprimées à Paris en 1727. * Ce moyen

* Cet Ouvrage est muni d'approbations, & d'un Privilege datés de l'an. 1724.

mérite effectivement attention, & je vais en parler sommairement.

Je remarque par préalable, que la forme du corps de l'instrument par lequel on doit prendre la hauteur d'un astre lorsque l'horison est couvert, ou faire quelqu'autre observation utile à l'invention de l'heure, n'est pas, à mon sens, le principal chef de la recherche proposée par l'Académie. On a atteint, ou peu s'en faut, la perfection à cet égard : on sçait appliquer une lunette au lieu de pinnules aux instrumens de mer, on sçait les diviser avec assez d'exactitude, & autant qu'il est nécessaire, soit par la méthode de *Nonius*, soit par d'autres, &c. La difficulté est, ce me semble, de trouver le meilleur moyen de déterminer la situation de l'instrument dirigé à l'astre par l'Observateur. Or, je crois qu'il n'y a qu'un pendule ou un niveau à liqueur, qui puisse être employé à cette fin : s'il faut donc opter, ce n'est qu'entre ces deux moyens.

Quant au pendule, il est sujet, comme je l'ai déja dit dans ma Piece, à des oscillations incommodes, & d'autant plus incommodes qu'elles sont plus promptes, & ont plus d'étendue. Mais 1°, on peut les rallentir tant qu'on veut, ces oscillations, sans donner pour cela une longueur excessive au pendule; car au lieu de le prendre simple, on peut le composer de deux poids *P*, *Q*, *fig.* 55. appliqués à une verge, soûtenue ou par un pivot qui soit dans la ligne des poids, ou par un double fil; en sorte qu'elle tende à la situation verticale, ou à la situation horisontale, ainsi qu'il est représenté dans la *Fig.* 55. 2°. On peut encore diminuer l'étendue des oscillations du pendule lorsqu'elle sera trop grande, en faisant frotter à discrétion quelqu'une de ses parties sur une houppe ou pinceau, planté dans le corps de l'instrument, & que l'observateur poussera de

son doigt à la rencontre du pendule, mais qu'un petit ressort en éloignera, dès que le doigt l'aura quitté, afin qu'il reste un peu de jeu au pendule. Je crois qu'avec cette double précaution, il ne sera pas extrêmement difficile de reconnoître les limites de deux de ses excursions consécutives de part & d'autre du vrai point de repos, &c. Au reste, je pense que c'est l'expérience qui doit décider sur la durée qu'il convient de procurer aux oscillations dont il s'agit; il n'est pas nécessaire d'observer qu'il y a un inconvénient particulier à la rendre grande, parce que l'oscillation est sujette à devenir par-là d'autant moins réguliere, en sorte que le milieu de l'arc décrit dans cette oscillation, peut être différent du vrai point de repos.

Quant aux niveaux à liqueur, ceux de forme commune sont sujets à des oscillations, aussi-bien que les pendules, & par la même cause. De-là naît le rapport connu des mouvemens alternatifs dont une liqueur contenue dans un tuyau est susceptible, à ceux d'un pendule. M. Newton a traité le premier ce sujet, & M. Dan. Bernoulli a amplifié cette théorie en différentes sections de son Hydrodynamique. On sçait que les oscillations de la liqueur sont plus ou moins lentes, selon que le tuyau où elle est enfermée a plus ou moins de longueur, &c. L'application d'un niveau à liqueur commun à un instrument, est donc sujette à inconvénient, aussi-bien que celle d'un pendule; cependant le niveau à liqueur a en ce point un petit avantage sur le pendule, n'étant pas exposé à l'impression du vent, & n'ayant pas besoin d'en être garanti comme celui-ci. J'ai déja remarqué que M. de Radouay a conseillé l'usage de ce moyen. Il rapporte dans son livre, que quelques Pilotes en avoient fait épreuve, & le goûtoient: mais je ne sçais point que cela ait eû de suite en France. M. Jean Elton, Anglois, a eu plus de succès; il

il paroît avoir introduit l'usage du niveau à liqueur, pour les observations de hauteur, parmi ceux de sa nation. Les Transactions Philosophiques de 1732, n° 423, contiennent la description de son instrument, qui a beaucoup de rapport avec le Quartier Anglois ordinaire. Deux niveaux y sont combinés, pour lui procurer une juste situation, soit pour l'observation en avant, soit pour l'observation en arriere; & c'est un avantage dans l'usage de cet instrument. Il faut, après lui avoir donné sa situation, mouvoir l'alidade pour rencontrer l'astre, ce qui est une incommodité, parce qu'il est bien difficile de ne pas ébranler en même tems & déplacer l'instrument (on évite cette incommodité en se servant d'un pendule). Les niveaux de M. Elton sont de ceux où l'on ne laisse qu'un petit vuide ou bulle, & leur tuyau est représenté droit, & assez court dans la Figure : mais leurs proportions ne sont point marquées dans le discours, non plus que la grosseur de la bulle ; c'est pourquoi il n'est pas possible de juger de la quantité des balancemens auxquels la liqueur de ces niveaux doit être sujette. Quoi qu'il en soit, deux Navigateurs, qui sont le Capitaine Hoxton & M. Walton, témoignent avoir fait usage de l'instrument de M. Elton, & en avoir été assez satisfaits, les observations qu'il a fournies étant peu différentes les unes d'avec les autres, & de celles qu'on avoit par le Quartier ordinaire ou autrement. Les épreuves du Capitaine Hoxton sont de l'année 1730, dans un voyage à Maryland. On trouve dans les Transactions Philos. de 1733, au n° 429, un journal d'observations faites dans un voyage à la Baye d'Hudson, en 1731, par le Capitaine Middleton, par lequel il paroît que ce Navigateur a employé l'instrument de M. Elton avec utilité, lorsque l'horison étoit couvert. Enfin, les Transact. Philos. de 1736 contiennent au n° 442, un journal en-

core plus ample d'observations faites par le même Capitaine Middleton, dans un pareil voyage en 1735, où il s'est encore servi de l'instrument de M. Elton, tantôt seul, & tantôt en concurrence avec d'autres instrumens de nouvelle construction. Un de ces instrumens est de l'invention de M. Hadley : mais on a omis de marquer si cet instrument est celui qui suppose l'horison visible, & qui fait voir l'astre par réflexion ; ou si c'est celui dont je vais parler dans un moment. Les deux autres instrumens sont attribués à M. Caleb Smith, & il paroît par l'explication qui termine le journal, qu'un de ces instrumens est propre à prendre hauteur, lorsque l'horison est embrumé, & qu'il demande une mer tranquille : mais je n'ai encore trouvé la description ni de l'un ni de l'autre de ces instrumens.

Voici une Table des observations de latitude, prises par l'instrument de M. Elton, concurremment avec d'autres.

Jours.	Instr. de M. Elton.	Instr. de M. Hadley.	1. Instr. de Smith.	2. Instr. de Smith.	Estime.
Juin 19	61° 54'	61° 49'	61° 44	....	61 47
21	61 12	61 5	61 4	....	61 0
22	61 12	61 0	....	61 12	61 11
24	61 38	....	61 36	....	61 37
29	61 30	....	61 30	61 20	61 30
Juill. 5	61 44	....	61 33	61 43	61 39
25	61 14	....	....	61 17	61 15
27	59 34	....	59 36	....	59 32
Sept. 10	61 46	61 45	61 43	....	61 58

M. Jean Hadley, Vice-Président de la Société Royale, a enfin proposé pour l'observation de la latitude, un quart-de-cercle auquel est appliqué un niveau à liqueur de forme singuliere ; dont la description se trouve dans les Transf. Philos. de 1733, nº 430. Ce qu'il y a de particulier à ce niveau, c'est 1° que son tuyau est courbé en

arc-de-cercle, en forte que la colomne de liqueur qui occupe une partie de ce tuyau, ayant la même courbure, le niveau de fes deux extrémités peut répondre à différens endroits du tuyau : par-là on obtient le même avantage que par l'ufage du pendule, je veux dire que l'alidade de l'inftrument ayant été placée fur une de fes divifions, y doit demeurer fixe pendant l'opération, & l'Obfervateur cherche l'aftre, & y dirige l'alidade, en gouvernant tout l'inftrument; cependant la liqueur joue, & montre enfin la fituation de l'inftrument; c'eft-à-dire, la quantité qu'il faut ajoûter à celle que marque l'alidade, ou en retrancher.

2°. M. Hadley coupe, pour ainfi dire, le cours de la liqueur dans fon tuyau, par une clef à laquelle il ne laiffe qu'un petit trou (il fait ce trou d'un diametre dix fois plus petit que le tuyau; c'eft pourquoi le filet de liqueur qui occupe ce paffage, eft cent fois plus petit que la colomne de liqueur, & cette colomne ne peut fe mouvoir qu'avec une viteffe cent fois moindre que celle du filet : au refte, on n'eft pas affujetti à employer précifément ces rapports). De-là fuivent deux chofes, l'une que la force qui peut produire le mouvement du filet de liqueur qui paffe par le trou, étant peu confidérable, le mouvement de toute la maffe de la liqueur eft fort lent. L'autre conféquence eft, que quoique cette maffe foit hors d'équilibre au commencement de l'opération, une de fes portions étant plus élevée que l'autre, la portion la plus haute defcend & foûleve la plus baffe, fans accélération fenfible, de maniere que l'inégalité primitive de ces portions, n'entraîne point de balancement réciproque entre elles. *

* Pour reconnoître aifément qu'il ne doit pas y avoir d'accélération dans la defcente de la plus haute portion de la liqueur, parce qu'elle paffe par un petit trou, il faut comparer cette defcente à l'évacuation d'un vaiffeau qui n'a qu'une petite

C'eſt-là une des choſes que M. Hadley a eues en vûe, & il remarque qu'elle doit arriver ; mais il va encore plus loin, il paroît prétendre que les ſecouſſes que l'agitation du vaiſſeau tranſmettra ſur l'inſtrument, & dont l'Obſervateur ne pourra le parer, quoiqu'il s'efforce de le tenir continuellement appliqué à l'aſtre, ne causeront pas non plus de balancement à la liqueur. *Elle traverſe lentement*, dit notre Auteur, *la clef du robinet, & ne fait aucunes vibrations ſenſibles ; car le robinet qui ne la laiſſe paſſer que par une petite ouverture, non-ſeulement en réprime les mouvemens, & en arrête les vibrations* (c'eſt-à-dire, celles que la deſcente de la liqueur causeroit ſans cela), *mais il la défend encore de l'agitation qu'elle pourroit recevoir dans le tuyau, lorſque l'inſtrument eſt ébranlé. Au ſurplus*, ajoûte-t-il, *je n'ai point remarqué que le robinet empêchât la liqueur de deſcendre, & de s'arrêter à la partie du tuyau la plus baſſe.* Mais ſi les ébranlemens reçus par l'inſtrument, ébranlemens que M. Hadley ſuppoſe être quelquefois conſidérables, puiſque l'alidade peut, ſelon lui, être tantôt plus haute, & tantôt plus baſſe que l'aſtre de pluſieurs minutes, &c. Si, *dis-je*, de tels ébranlemens, ſi de tels mouvemens ne cauſoient aucune agitation dans la liqueur, comment une petite différence de poids entre ſes deux portions, qui ſont de part & d'autre de ſon point le plus bas, ſeroit-elle capable de la mettre en mouvement & d'opérer ſa deſcente ? Je penſe donc que quand l'inſtrument de M. Hadley reçoit de certaines ſecouſſes, la liqueur de ſon tuyau doit ſouffrir par contre-coup une agitation réelle, nonobſtant l'interpoſition de la clef : cependant j'avoue que cette agitation n'aura pas un effet bien notable (& c'eſt peut-être ce qu'a

ouverture à ſon fond, telle qu'en une clepſydre. Or, bien loin que la liqueur qui s'échappe de la clepſydre, s'accélere à meſure que ce vaiſſeau ſe vuide, au contraire elle ſort de moins en moins vîte, &c.

voulu dire le sçavant Auteur), parce que les secousses transmises à l'instrument se succédant promptement & en sens contraires, l'agitation qui en résulte sur la liqueur, se fait aussi en sens contraires, & ses effets particuliers s'entredétruisent perpétuellement. Plus le passage de la liqueur sera petit, & moins les suites de l'agitation dont nous parlons seront sensibles; c'est ce que j'avoue bien volontiers, mais aussi la descente de la liqueur en deviendra d'autant plus lente. Je crois au reste que ce que je viens d'avancer n'a pas besoin de preuve, & qu'il n'est pas question de faire ici une dissertation géométrique & complete, sur les propriétés ou accidens du mouvement d'une liqueur dans un tuyau : M. Hadley lui-même ne s'est point arrêté à une telle discussion, mais, supposant les principes connus, il se contente d'avancer des faits; il a même négligé de marquer la grandeur du rayon de courbure qu'il a donné à son tuyau, grandeur qui serviroit à déterminer le tems de la descente de la liqueur par un espace donné; il nous dit seulement qu'il faut une demi-minute & plus à la liqueur pour traverser le robinet, suivant que l'ouverture de la clef est plus ou moins grande, à proportion de la cavité du tuyau. Peut-être faudra-t-il une minute entiere à la liqueur pour parvenir à la situation désirée, si on fait le trou de la clef assez petit pour amortir suffisamment les vibrations de la liqueur.

Quant à l'usage de cet instrument, il me semble fort propre à remplir la destination que son Auteur lui a donnée, c'est-à-dire, à faire connoître la hauteur méridionale d'un astre, ou bien la latitude, lorsque l'horison est couvert; car la lenteur avec laquelle la liqueur du niveau parvient à son point de repos sensible, n'est point un inconvénient par rapport à des observations de ce genre, puisque la hauteur d'un astre qui est dans le voisinage du mé-

ridien, ne change pas fort sensiblement pendant quelques minutes, & que c'est une telle circonstance qu'il faut saisir autant qu'on peut, pour les observations de latitude, ainsi que je l'ai remarqué dans ma Piece. Je crois même que l'instrument dont il s'agit, est encore bon pour prendre hauteur, c'est-à-dire, que d'autres instrumens ne sont gueres meilleurs lorsque l'horison est visible, mais imparfaitement. Au reste, j'ignore si cet instrument a été mis à l'épreuve, & si on y a trouvé ou non des inconvéniens. Quoi qu'il en soit, il me semble qu'il est un peu délicat pour le commun des marins, & je vois qu'il exige bien des attentions. Par exemple, le volume de la liqueur ne pouvant pas être déterminé, parce que cette liqueur se raréfie par le chaud, & se condense par le froid, pour ne pas dire qu'elle peut être sujette à s'évaporer, il faut avoir égard à cette variation de volume, & considérer la situation des deux extrémités de la colomne de liqueur, pour faire un bon usage des divisions de l'échelle qui accompagne le tuyau, &c.

Mais si l'on veut transférer l'emploi de l'instrument ou bien du niveau de M. Hadley, aux observations qui sont les plus convenables à la détermination de l'heure, il s'y trouvera un inconvénient non-leger, provenant de la lenteur de la marche de la liqueur. Supposons, par exemple, que ce soit par une observation de la hauteur d'un astre qu'on cherche l'heure, il faut saisir l'astre, comme je l'ai montré, dans le tems où sa hauteur change le plus vîte. Supposons donc encore que le Navigateur soit aux environs de la Ligne, & que l'astre soit auprès du premier vertical, cet astre s'élevera de quinze degrés ou environ en une heure, ou bien d'un quart de degré en une minute. S'il faut donc une minute, je le suppose, à la liqueur pour se mettre de niveau, lorsque l'instrument est dirigé à un

point fixe ; & que le tuyau peut être censé fixe, il pourra arriver lorsque l'instrument sera dirigé à l'astre placé comme je l'ai dit, que la liqueur se trouve éloignée de son niveau d'environ un quart de degré, après une minute de tems depuis qu'elle aura commencé à joüer, & ainsi de suite, parce que le tuyau aura été continuellement déplacé. Ce que je dis arrivera effectivement, lorsque le mouvement de la liqueur sera en sens contraire de celui de l'instrument. Ainsi dans ce cas, la liqueur aura un mouvement continuel, & la ligne qui passera par ses deux extrémités, sera toûjours en arriere du vrai niveau, d'une quantité difficile à estimer. Que si la liqueur se trouve tellement située au commencement de l'opération, que sa tendance à descendre soit en même sens que le mouvement qu'il est nécessaire de donner à tout le corps de l'instrument, pour suivre continuellement l'astre dans son cours en hauteur, alors il est vrai qu'il y aura un instant où la liqueur se trouvera de niveau, mais cet instant ne sçauroit être bien discerné, car la liqueur n'aura qu'un mouvement extrêmement lent, & paroîtra sensiblement arrêtée quelque tems avant & après cet instant. Ce second cas est peut-être moins désavantageux que le précédent, mais posé qu'il le soit, ce seroit toûjours une affaire assez délicate pour l'Observateur, que de placer tellement l'alidade avant le commencement de l'opération de viser à l'astre, qu'il se procurât la circonstance qui constitue le cas dont il s'agit, & ne la laissât pas échapper.

Pour revenir maintenant à la question proposée par l'Académie, quel moyen réputerons-nous le plus sûr, pour faire en mer les observations propres à déterminer l'heure ? Appphiquerons-nous à l'instrument qu'il faudra diriger à un ou à deux astres, un pendule ou un niveau à liqueur ? Le pendule est sujet à des oscillations incommo-

des, le niveau à liqueur peut aussi être sujet à de pareilles oscillations. Employerons-nous au contraire le moyen imaginé par M. Hadley, moyen par lequel on supprime, ou pour mieux dire, l'on diminue tant qu'on veut les balancemens de la liqueur d'un niveau ? Ce parti a aussi des inconvéniens rélatifs au Probleme dont il s'agit, nous venons de le voir. Enfin, prendrons-nous un parti moyen, c'est-à-dire, proposerons-nous l'usage d'un niveau dont la liqueur n'eût pas un mouvement si lent que dans celui de M. Hadley ? car le degré de ce mouvement est en notre disposition, en diversifiant le rapport de l'ouverture par où la liqueur doit passer à la section du tuyau : mais nous n'éviterons pas ainsi tout inconvénient, la liqueur aura des vibrations plus ou moins sensibles. En un mot, s'il y a des inconvéniens dans les deux cas extrèmes & opposés, qui sont celui de l'exemption des oscillations, & celui de leur existence avec promptitude, il n'est pas douteux qu'il n'y ait aussi de l'inconvénient dans un cas moyen entre ces extrèmes. J'estime pour conclusion, qu'on pourroit appliquer tout-à-la-fois à un *instrument*, & un pendule, & un niveau du genre de celui de M. *Hadley* : car comme deux Observateurs sont nécessaires dans les observations qui se font la nuit, & lorsque l'horison est invisible, l'un d'eux étant entierement occupé à viser à l'astre & à le suivre, son second seroit, ce semble, en état de faire attention en même tems, au pendule & au niveau à liqueur, & le résultat de l'opération n'en seroit que plus sûr, en prenant un milieu entre les indications de ces moyens différens. Au reste, je ne peux m'empêcher de remarquer que la justesse des observations convenables à la détermination de l'heure, dépendra toûjours beaucoup de l'adresse personnelle, & du génie des Observateurs : car mieux une personne sçaura suivre un astre,

&

& y appliquer constamment son instrument de la même maniere, & moins cet instrument recevra de secousses & causera par conséquent d'agitation irréguliere au pendule, ou à la liqueur du niveau dont il sera armé. D'un autre côté, un homme intelligent fera toûjours attention aux différentes causes des erreurs qui sont inévitables dans les observations, & il tâchera de ne s'y exposer que le moins qu'il sera possible, ou bien même il s'en formera une certaine estime, par laquelle il modifiera l'observation pure & simple. Mais quelque perfection qu'eussent des moyens méchaniques propres aux observations qui fournissent l'heure, je crois que si ces moyens sont maniés par des gens grossiers, les déterminations qui en résulteront, manqueront toûjours de justesse & de sûreté.

Comme j'adopte l'invention de M. Hadley, je crois qu'il me sera permis de faire ici une remarque touchant la pratique, & même de proposer quelques modifications ou changemens, dont cette invention est susceptible.

1°. Le tuyau employé par M. Hadley, est un tuyau capillaire, n'ayant qu'un dixieme de pouce Anglois de diametre. D'ailleurs la liqueur que M. Hadley y met, est de l'esprit-de-vin, il y a donc lieu de craindre que la liqueur n'ait plus d'adhésion à une branche du tuyau qu'à l'autre, c'est-à-dire, à celle dans laquelle elle descend, qu'à celle où elle monte (ce qui dérangeroit beaucoup son mouvement); car on sçait que la liqueur s'attache mieux, & quitte plus difficilement par conséquent le verre déja mouillé, qu'elle ne s'attache & ne glisse sur celui qui est sec. Il est donc à propos, avant que de mettre le niveau en expérience, de faire en sorte que ses deux branches soient également humides dans les endroits où la liqueur doit passer, si on continue d'en employer une qui mouille le verre.

2°. Je ne sçai pas pourquoi M. Hadley a proposé l'esprit-de-vin plutôt que le mercure, pour la liqueur de son niveau : il a eu apparemment ses raisons. M. Hadley auroit-il cru qu'il seroit trop difficile de former la clef par le trou de laquelle la liqueur doit passer d'une branche dans l'autre, avec assez de justesse, & de telle matiere que le mercure, ne pût s'échapper hors du tuyau & se perdre? Si cet inconvénient peut être sauvé, je conseillerois l'usage du mercure : cette liqueur a l'avantage d'être moins dilatable que l'esprit-de-vin, & d'ailleurs comme elle ne s'attache pas au verre, ses deux extrémités seroient mieux terminées & mieux discernables : ainsi on ne seroit pas obligé de prendre un tuyau aussi petit que l'a fait M. Hadley pour le corps du niveau, & la clef pourroit recevoir une ouverture un peu moins petite : il doit être difficile de percer un trou qui n'ait qu'un $\frac{1}{100}$ de pouce de diametre, &c.

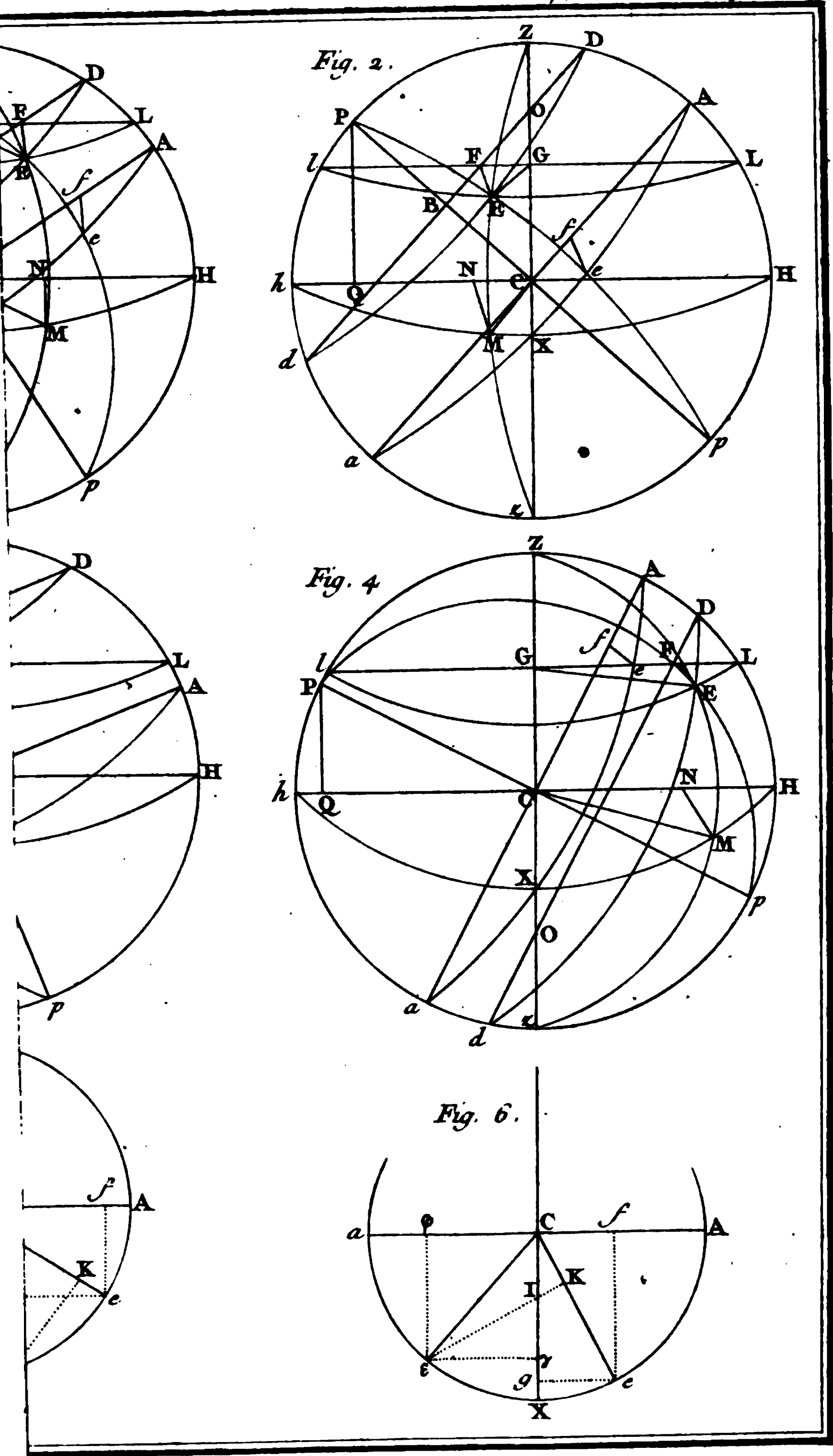
3°. Il faut, dans l'usage du niveau de M. Hadley, considérer les deux termes auxquels répond la liqueur; c'est une petite peine & une double occasion d'erreur. Ne pourroit-on pas éviter cela? Voici ce que j'imagine dans cette vûe : la liqueur n'est pas si précieuse qu'on ne puisse en sacrifier quelques gouttes, je voudrois donc qu'une des branches du niveau eût moins de longueur que l'autre, & fût terminée par un petit trou par lequel la liqueur sortiroit, tant qu'elle seroit poussée par celle que contiendroit l'autre branche, c'est-à-dire, que la liqueur ne s'éleveroit point dans la branche courte, & descendroit seulement dans la longue. Il est visible que l'instrument peut être toûjours disposé pour l'observation, de maniere que la tendance de la liqueur soit vers l'orifice de la branche courte. La mesure de cette branche étant donc fixe & donnée, on auroit seulement à observer l'extrémité de la liqueur dans la longue branche.

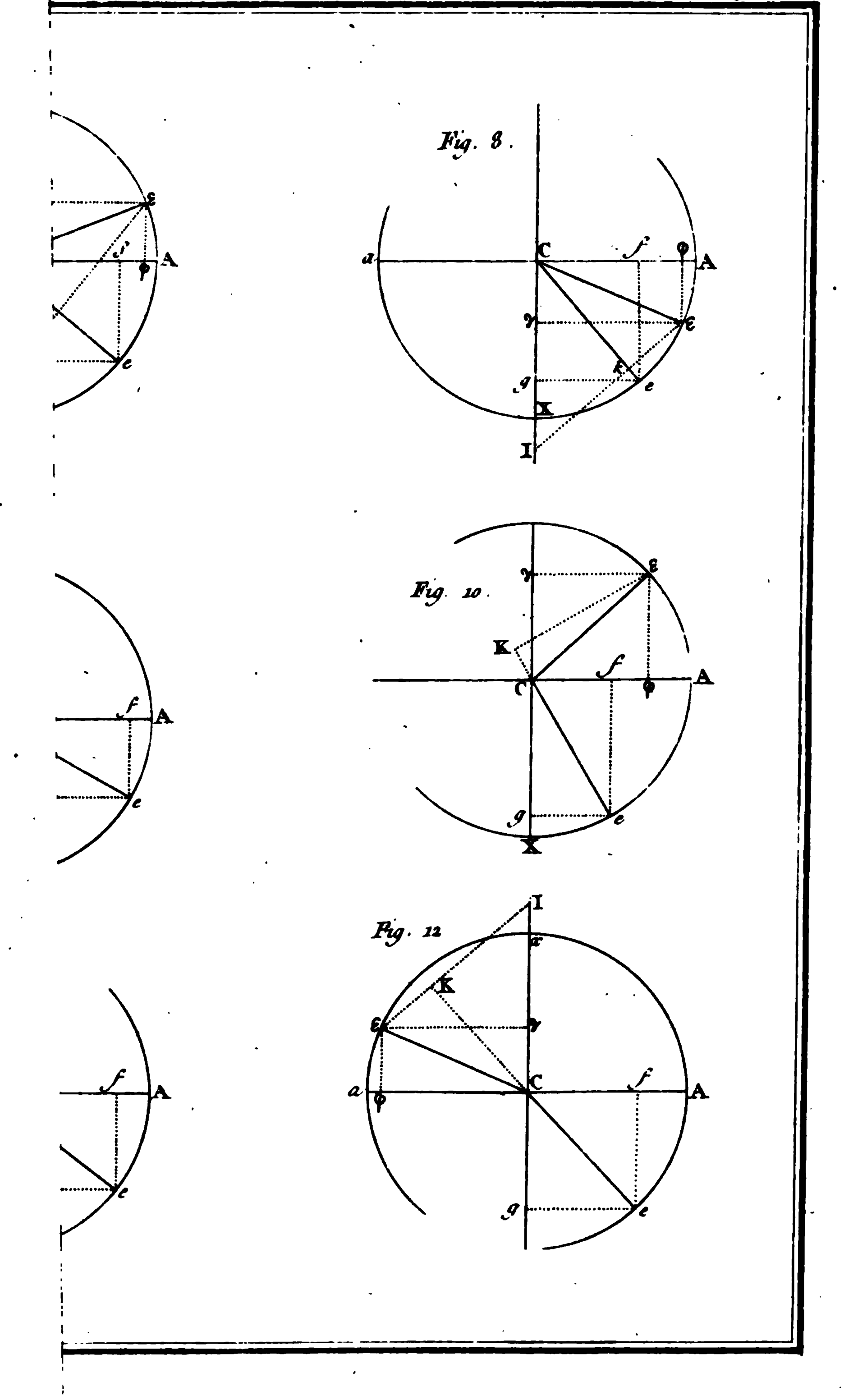
4°. Je suppose encore que l'on peut employer le mercure. Il est peut-être à propos que le mouvement de la liqueur, qui cherche toûjours son niveau pendant qu'on suit un astre qui change de hauteur, soit sensible, afin qu'on puisse discerner si ce mouvement est uniforme ou variable, &c. & tirer de-là des inductions. Or, c'est ce qu'on peut procurer sans exposer cette liqueur à des balancemens; c'est, dis-je, ce qu'on peut effectuer, en combinant avec le mercure une autre liqueur beaucoup plus légere, à peu près comme dans les barometres composés. Le tuyau qu'occupera le mercure aura certaine largeur, & sera joint à un tuyau uniforme beaucoup plus étroit, où l'autre liqueur s'étendra; c'est à côté de ce second tuyau, que sera appliquée une échelle qui marquera la situation de l'instrument. Je ne m'arrête point à marquer ce qu'il faudra pratiquer pour bien diviser cette échelle: si, par exemple, on donne 5 lignes de diametre au tuyau destiné à loger le mercure, & une ligne seulement au petit tuyau; la colomne de liqueur légere contenue dans ce tuyau, aura 25 fois plus de vîtesse que celle de mercure: mais nonobstant cette différence de vîtesse, les deux liqueurs n'auront guere plus de disposition à balancer, à cause de la différence des masses; & pour réprimer d'autant plus le balancement, on pourra donner seulement un tiers de ligne de diametre à l'ouverture par où le mercure passera d'une des branches du niveau dans l'autre. Ainsi le filet du mercure qui coulera par ce trou, sera plus de deux cens fois plus petit que les colomnes de cette liqueur. Cela posé, il y aura, selon mon estime, aussi peu de balancemens que dans le cas de M. Hadley, &c.

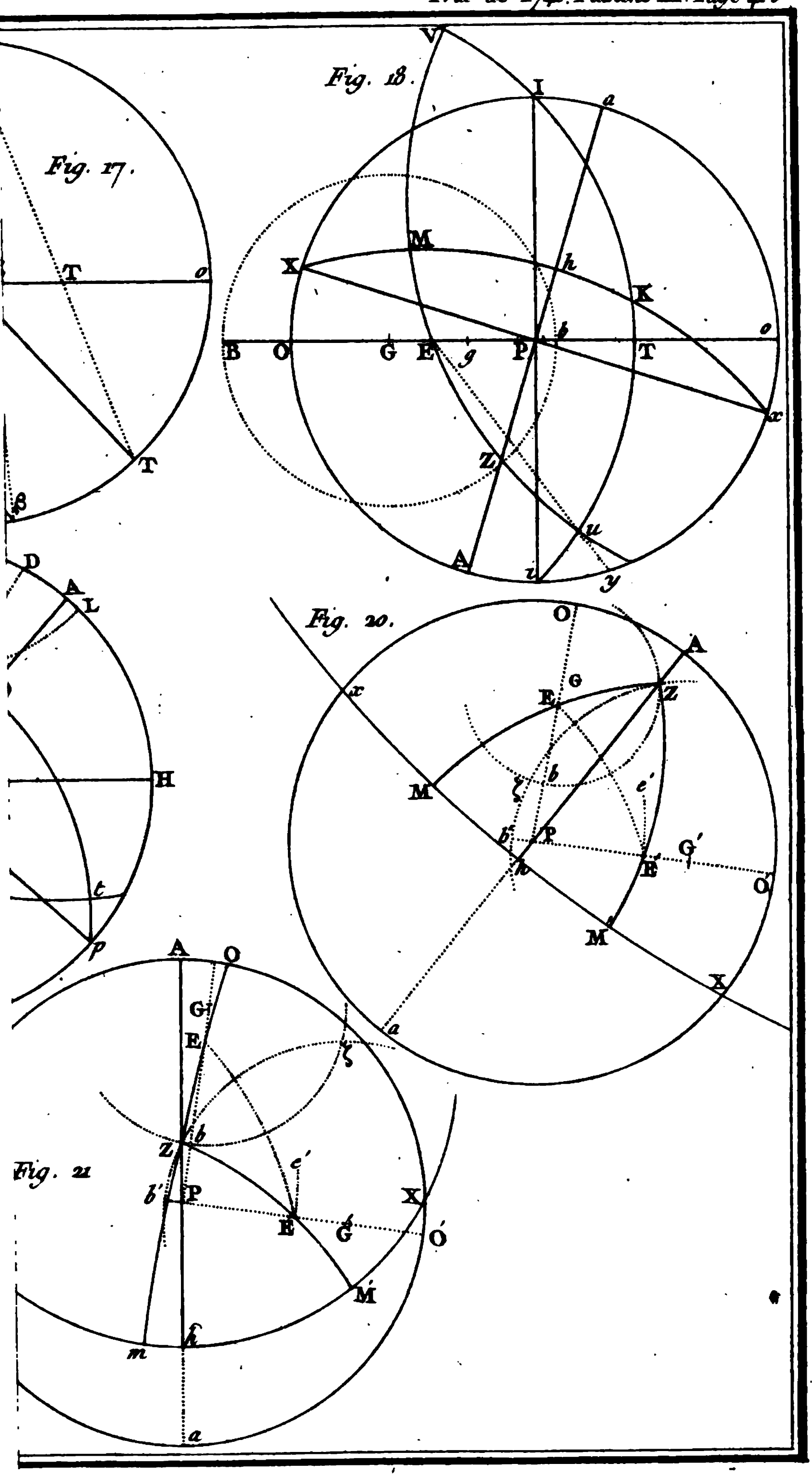
5°. Enfin, comme la lenteur avec laquelle la liqueur parvient au niveau, ou s'en approche, est incommode & nuisible, surtout quand on travaille à découvrir l'heure,

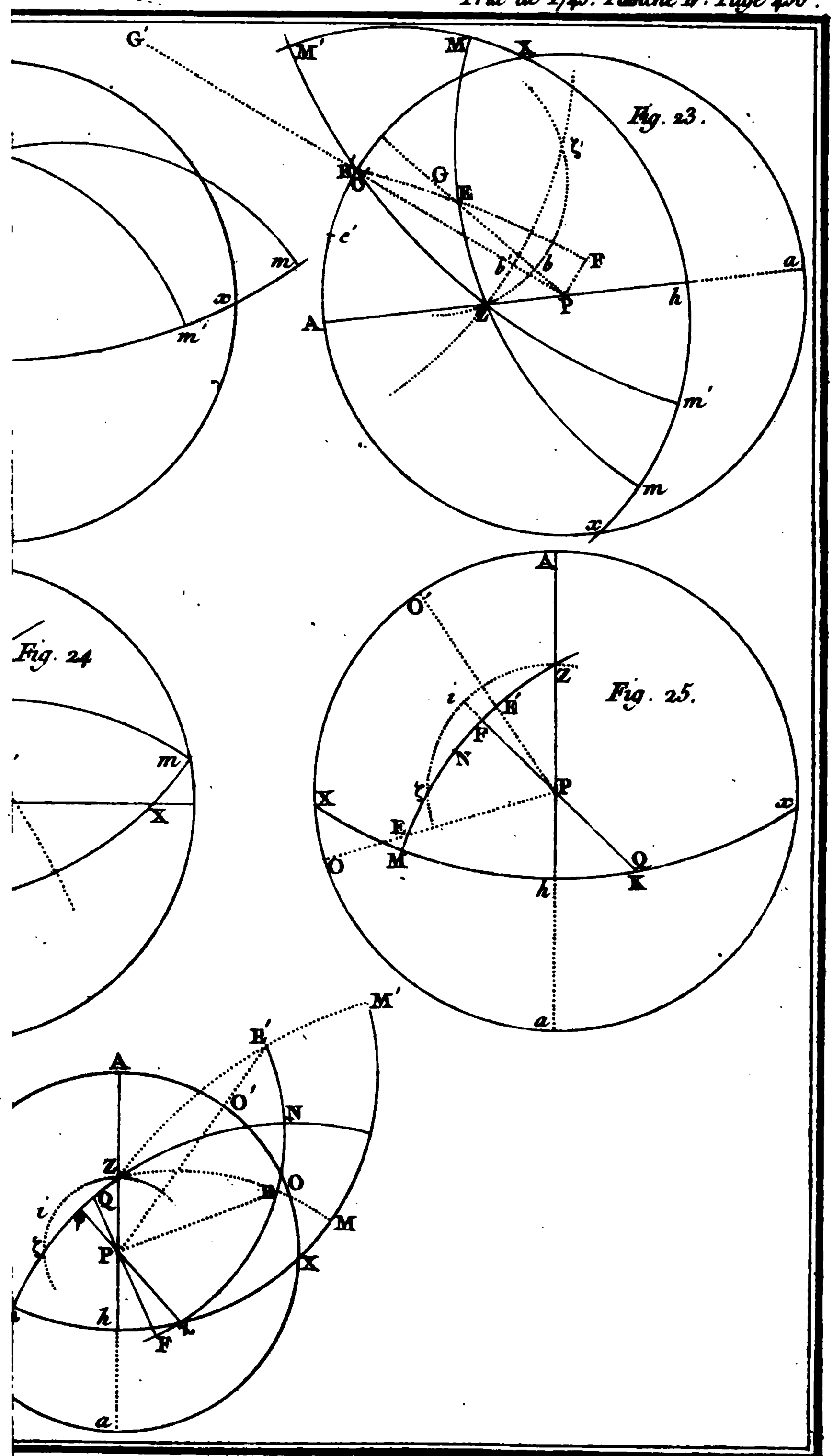
lorſque le paſſage par où file la liqueur, eſt auſſi petit que nous l'avons fait juſqu'ici, à proportion de la capacité du corps du niveau : je voudrois que l'aire de ce paſſage pût être diverſifiée à volonté, & cela paroît poſſible, ſi le corps du niveau a un diametre approchant de celui que j'ai marqué au n° précédent ; je veux dire qu'on pourroit faire une clef qu'on gouverneroit à diſcrétion, & cependant avec meſure, par un petit roüage ou une vis, & qui laiſſeroit à la liqueur un paſſage plus ou moins étroit. Je n'ai pas beſoin de dire qu'on laiſſeroit plus de liberté de ſe mouvoir à la liqueur au commencement de l'opération, & lorſqu'on la réputeroit aſſez éloignée du niveau, mais qu'on reſtraindroit cette liberté à meſure qu'on l'eſtimeroit plus voiſine de l'état déſiré. On pourroit auſſi avoir une deuxieme clef, qui ſeroit faite à l'ordinaire, & ſerviroit à arrêter entierement la liqueur lorſqu'on le jugeroit à propos.

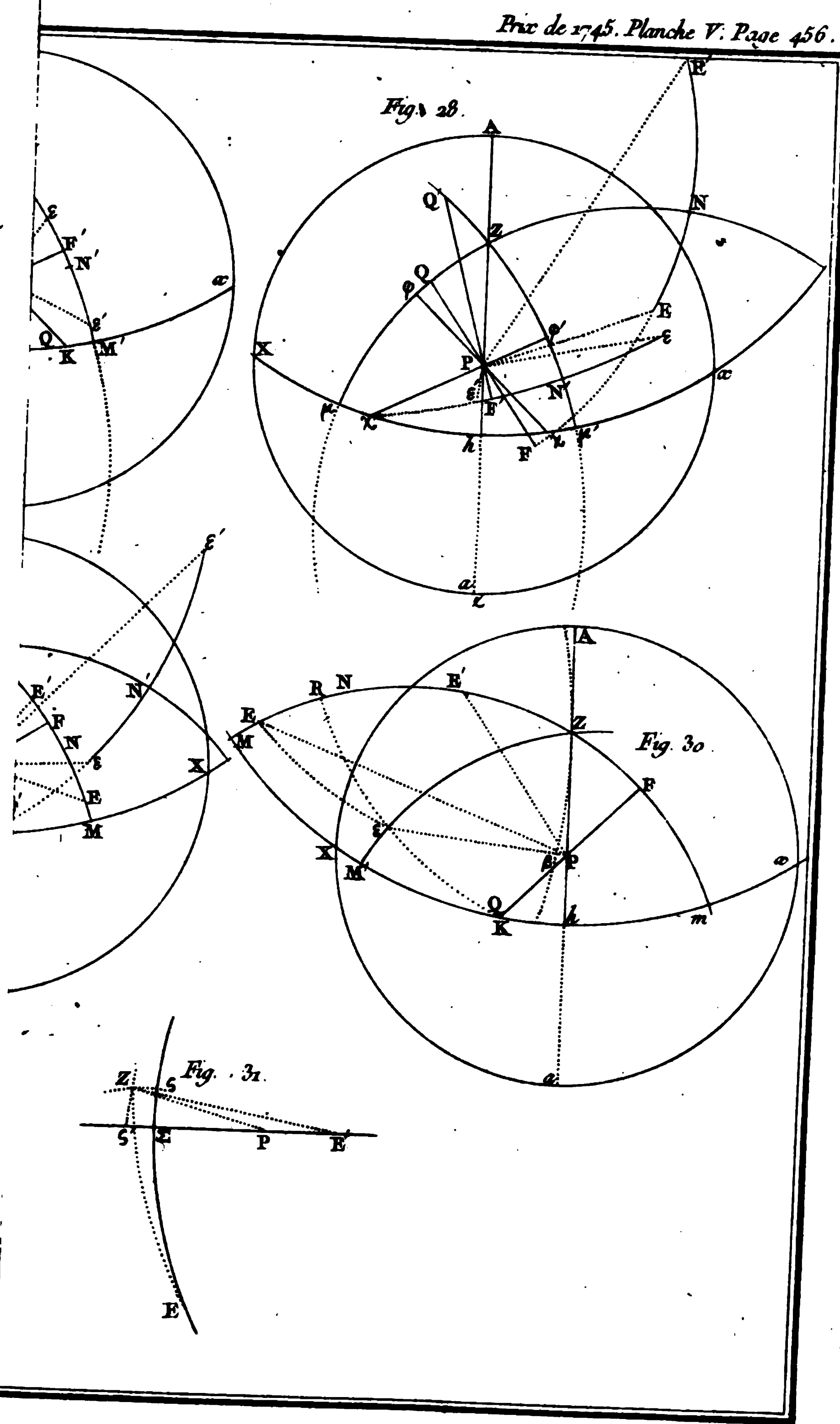



Fig. 2.
Z
D
O
A
P
F
G
l
L
B
E
f
N
C
e
h
H
Q
M
X
d
a
p
Fig. 4
Z
A
D
G
f
F
L
l
e
P
E
N
h
C
H
Q
M
X
p
O
a
d
Fig. 6.
a
C
f
A
I
K
g
e
X


Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 12


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 21


Fig. 23.
Fig. 24
Fig. 25.


Fig. 28.
Fig. 30.
Fig. 31.

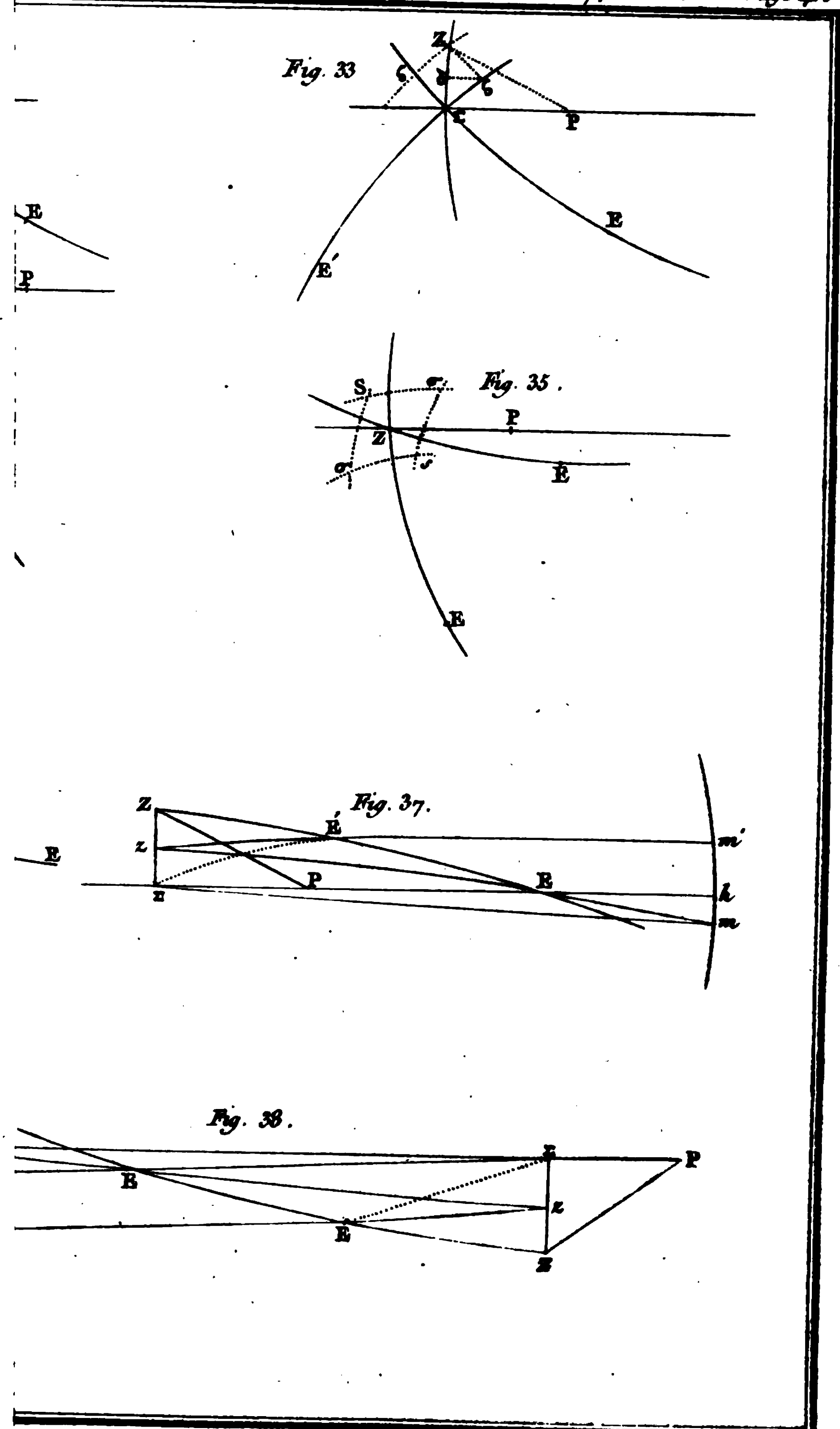
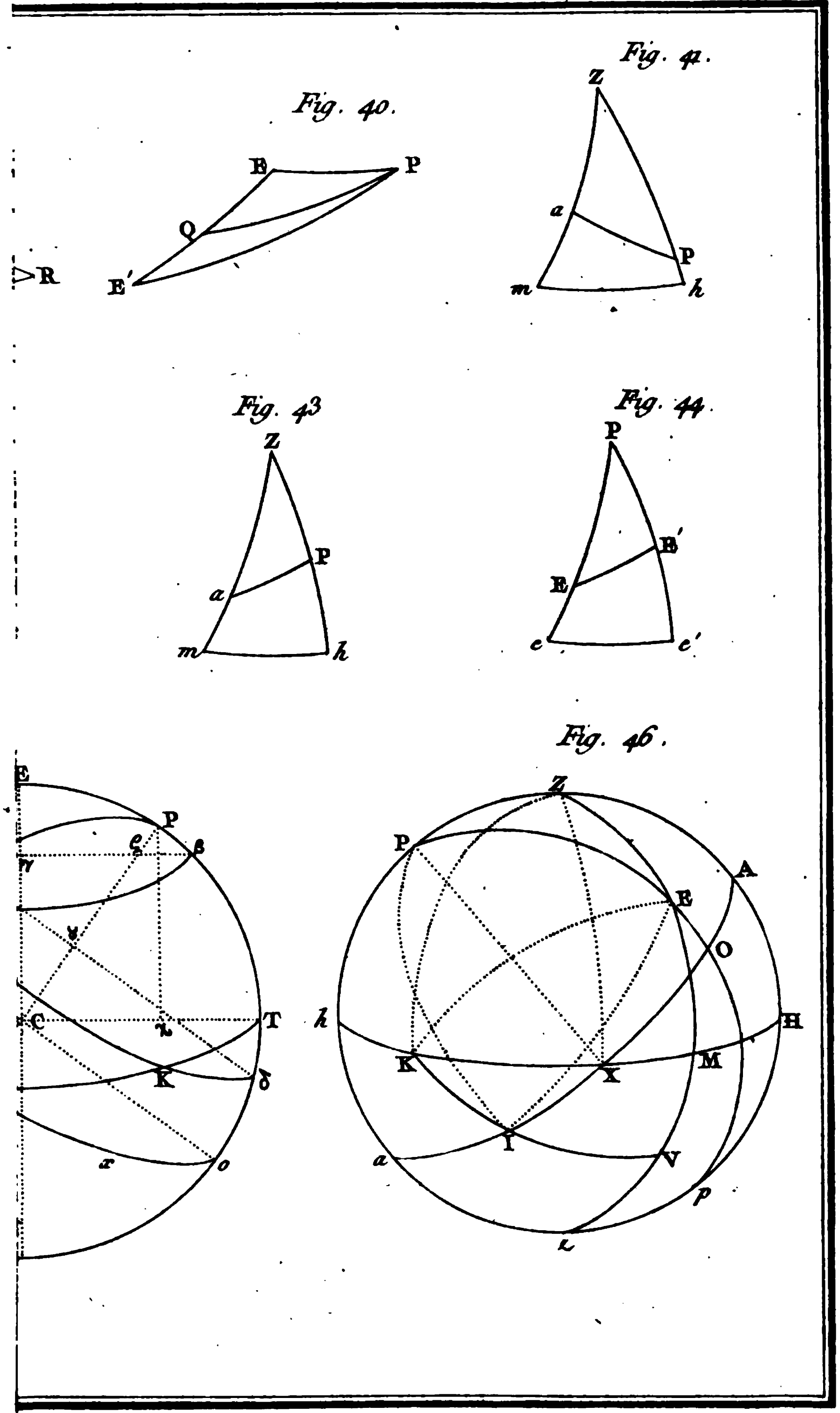
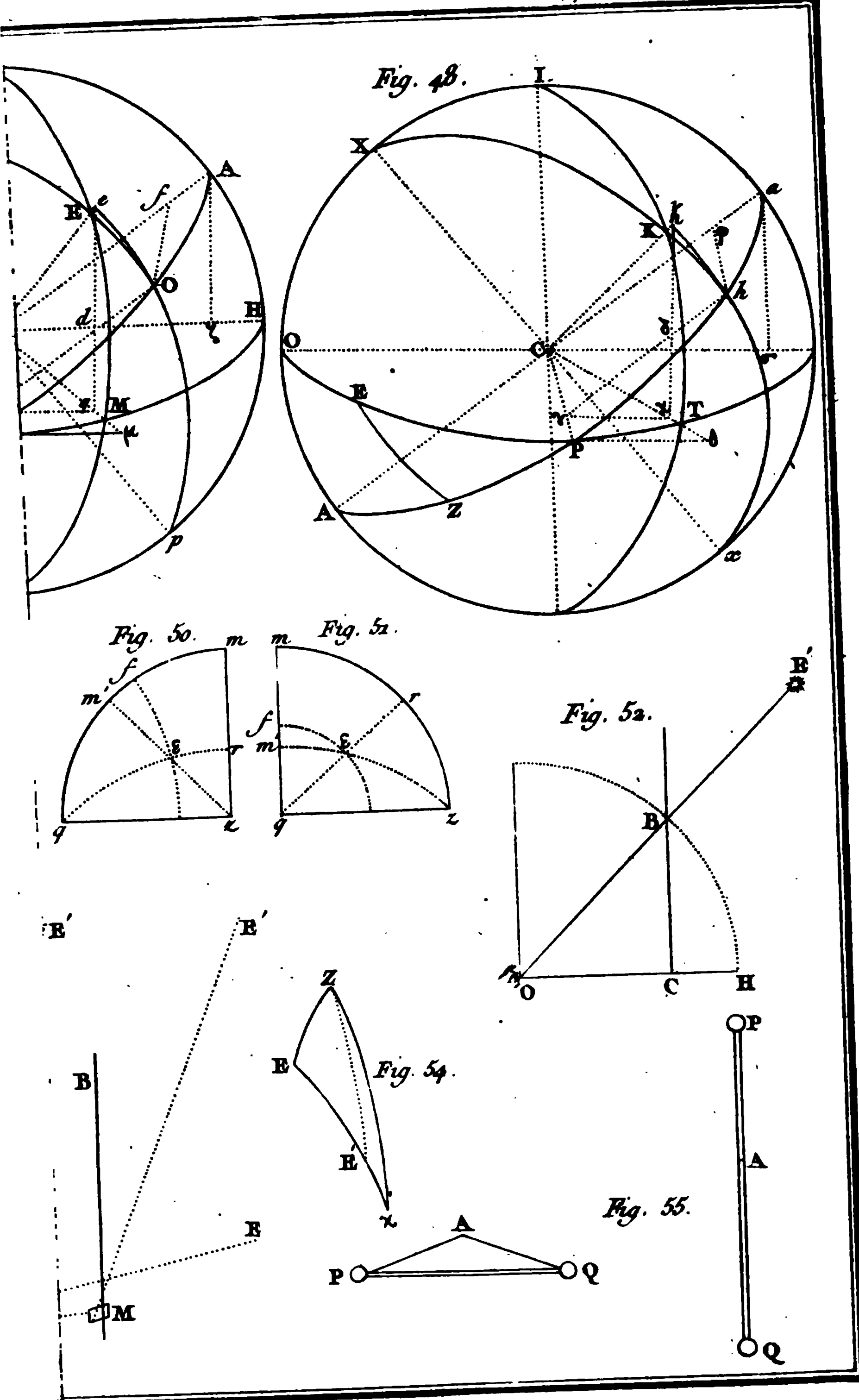


Fig. 33
Z
ζ
ζ
P
E
E
E
P
S
σ
Fig. 35.
P
Z
σ
s
E
E
Z
Fig. 37.
E
z
m
E
P
E
h
m
Fig. 38.
P
E
z
E


Fig. 40.
E
P
Q
R
E′
Fig. 41.
Z
a
P
m
h
Fig. 43
Z
P
a
m
h
Fig. 44.
P
E′
E
e
e′
Fig. 46.
E
P
β
T
C
K
δ
x
o
Z
P
A
E
O
h
H
K
X
M
I
a
V
p
z


Fig. 48.
I
X
a
k
K
φ
h
O
C
δ
σ
E
T
P
A
Z
x
A
e
E
f
O
d
ζ
H
M
μ
p
Fig. 50.
m
f
m
r
q
z
Fig. 51.
m
r
f
m
q
z
Fig. 52.
E′
B
O
C
H
E′
E′
B
E
M
Z
E
Fig. 54.
E′
P
A
Q
Fig. 55.
P
A
Q

MEMOIRE

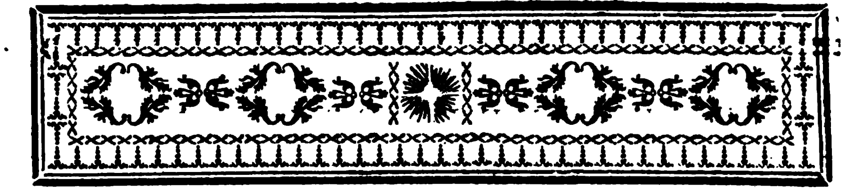
SUR LE

PROGRAMME

Pour le Prix de 1747.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

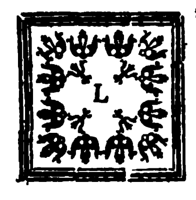
Semper id melius est quod optimo propinquius est, Arist. lib II. de Cœlo.



MEMOIRE
SUR
LE PROGRAMME
Pour le Prix de 1747.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

Semper id melius est quod optimo propinquius est... *Arist. lib. 2. de Cælo.*



L'ACADEMIE Royale dans la même feuille, semble désirer uniquement qu'on fournisse aux Navigateurs les moyens *méchaniques* les plus sûrs, pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations dont on peut conclurre l'heure.

C'est pour remplir cet objet, que je me suis uniquement attaché à la recherche des instrumens, & que j'aurai l'honneur d'en proposer deux, dont l'un pourra servir en tout tems, pendant la nuit & le jour, sans aucun recours au Soleil ni aux étoiles, & l'autre pendant tous les momens du jour, où le ciel sera pur, & le Soleil visible.

PREMIERE PARTIE.

AVANT que de décrire ce premier instrument, je supplie mes Juges de me pardonner quelques observations que je vais faire ici, touchant les horloges à *roüage*, uniquement pour leur prouver que c'est avec connoissance de cause, quand je les abandonne pour chercher un moyen qui me paroît plus sûr.

Nos meilleures pendules ne sçauroient être d'aucun usage sur mer, par la principale raison que la fréquente agitation du vaisseau feroit arrêter le pendule. Ce premier inconvénient suffit pour en interdire l'usage sur les bâtimens, sans avoir besoin de parler ici de l'allongement & raccourcissement des métaux; de la différence des vibrations dans un air plus ou moins pesant, des différens degrés de force des ressorts, suivant la différente température de l'air, & de l'*usure* continuelle d'une infinité de pieces très-déliées, qui travaillent toutes avec force, & dont chacune en particulier ne peut pas souffrir la moindre altération, sans que la justesse de la piece s'en ressente.

La montre de poche se ressent moins de l'agitation du vaisseau, ou pour mieux dire, ne ressent que les mouvemens de la personne qui la porte, & dans une montre *excellente*, ces mouvemens ordinaires ne la dérangent pas beaucoup, surtout quand elle est dans sa premiere fraîcheur : mais l'avantage qu'elle a sur les pendules, se trouve bien compensé par la différence du *régulateur*; je parle de son petit balancier, dont les vibrations trop multipliées, ne seront jamais comparables pour la justesse, à la longueur d'un pendule à *secondes*.

L'invention

L'invention admirable du reſſort ſpiral, eſt d'un grand ſecours pour entretenir pendant quelque tems la juſteſſe dans ces petites machines: mais étant lui-même ſenſible aux changemens de l'air, nous ſommes obligés de tems en tems, de le *bander* ou *lâcher*, par le moyen du rateau, afin de le remettre dans un état de force proportionné à l'action qu'il doit produire. Ce qu'il y a de fâcheux, c'eſt qu'on ne peut appercevoir ce dérangement que par comparaiſon à quelqu'autre piece ſûre, ou à l'aſpect des aſtres, & l'on n'a ſouvent ſur mer, ni l'un ni l'autre de ces deux moyens.

Tout ce que je viens de dire ne doit s'entendre que d'une montre excellente à tous égards, & ſortant depuis peu de la main de l'ouvrier. Mais en eſt-il beaucoup de ce nombre ? Enfin, je ſuppoſe qu'il y en ait une parfaitement juſte, il eſt impoſſible qu'elle le ſoit long-tems: les trous du *coq*, de la *potence*, & enſuite ceux des *platines* s'agrandiſſent inſenſiblement; les pivots prennent du jeu, & l'engraînage s'affoiblit; le peu d'huile qu'on y met ſeche, & rend les frottemens plus ſenſibles; les pointes de la roue de rencontre s'émouſſent, les palettes du balancier ſe creuſent, & les vibrations deviennent plus courtes; le grand reſſort tire plus vivement dans certains tems que dans d'autres, & une infinité d'autres dérangemens que mes Juges connoiſſent mieux que moi, rendent la montre de poche ſi incertaine, qu'on ne peut pas raiſonnablement ſe flatter qu'une bonne montre puiſſe aller quatre jours de ſuite, ſans s'écarter de quelques minutes. Mais ſi une montre excellente dépend de tant de cas qui peuvent la rendre mauvaiſe, que ſera-ce de celles qui ne ſont que médiocres? D'où je conclus que toutes les pieces à *roüage* qu'on a trouvées juſqu'ici, & probablement

quefois à être couchés diamétralement sur le trou, ils séparent le *coulage* en deux, ce qui fait retarder considérablement le sablier, & quelquefois arrêter : avec un trou conique, ce défaut ne doit arriver que très-rarement, parce que ceux de ces poils qui descendent horisontalement, venant à toucher les parois du cone par un bout, l'autre bout du poil s'abbaisse, & il arrive à la pointe du cone dans une situation verticale, qui lui permet de passer aisément.

EXPERIENCE.

SI vous mettez un, ou plusieurs sabliers des meilleurs, sur une planche horisontale, dont un bout sera appuyé sur une table, & l'autre sur une *roulette dentelée*, que l'on fera tourner avec une manivelle, cette roulette causera un trémoussement à la planche, qui fera arrêter tous les sabliers : en voici la raison physique. A force d'agitation, l'air qui se trouve renfermé parmi les grains de sable dont la bouteille supérieure est pleine, se dégage & gagne le haut de la bouteille, laissant les grains de sable si serrés entre eux, après la séparation de l'air, qu'il se fait au-dessus du bouton une petite *voûte*, & bien-tôt il ne coule plus rien, parce que l'air inférieur ne trouve plus de passage pour traverser le sable qui est dans la bouteille supérieure. Cette expérience que je découvris par hasard, prouve ce que j'ai dit plus haut, que l'air, dans certaines occasions, peut causer du dérangement au sable; car de même qu'un sablier bien *trémoussé* s'arrête totalement, de même un autre moins trémoussé pourra couler plus lentement, sans toutefois s'arrêter, parce qu'il restera encore assez d'interstice parmi le sable supérieur, pour que l'air trouve un petit passage.

Description d'un Sablier de 30 heures, propre à servir sur mer, marquant distinctement les heures & les minutes une à une, *& qui ne s'arrête pas dans le tems même qu'on le retourne.*

LE Sablier dont je vais avoir l'honneur de vous entretenir, & dont j'ai tout lieu de croire que l'idée est neuve, m'embarrasse presque autant à décrire sur le papier, qu'il m'a donné de peine à imaginer & à construire. J'espere cependant me faire entendre, à force de multiplier les figures, en attendant que le modele effectif acheve de présenter à vos yeux ce qui pourra manquer du côté de l'explication. Il est d'un assez grand volume, & fort pesant : mais si avec ces deux secours qui m'étoient nécessaires, je vous offre une Piece qui peut devenir excellente, j'espere que vous me pardonnerez l'un en faveur de l'autre.

Il est composé de fer & de bois. Le corps du sablier est une caisse *AB*, *Fig.* 1, de bois de noyer, quarré-longue, de 40 pouces de longueur, 12 pouces de largeur, & 7 pouces d'épaisseur extérieure. Elle est montée sur deux pivots qui sont au centre, lesquels pivots sont supportés à leur tour par une chape de fer *CD*, de 3 pouces de largeur & de 5 lignes d'épaisseur.

Cette chape est suspendue par une boucle *E*, pliante à tout sens, pour obéir à toutes les agitations du vaisseau. Le cadran & la quadrature qui est dessous, sont renfermés dans une boîte de fer extérieure *FG*, arrêtée solidement sur la chape : une aiguille marque les minutes une à une, & les heures, qui marchent en sautoir, paroissent successivement à travers l'ouverture *X*. Le tout est couvert d'une glace, comme aux pendules.

Quand on veut tourner le sablier, on leve un arrêt qui est au haut de la chape, on prend le bas de la caisse avec la main droite, qu'on fait tourner suivant l'arc ponctué 1, 2, 3, 4, & dès que *B* est arrivé en *A*, l'arrêt qui est à ressort, accroche la caisse, & cela suffit pour 24 heures & plus, comme une montre de poche.

La *Fig.* 2 représente le profil du sablier, afin de faire remarquer les deux pivots *I,H,* sur lesquels tourne la caisse. J'ai répété les mêmes lettres de la *Fig.* 1, pour qu'on retrouve chaque piece plus aisément. Il y a aussi dix lucarnes qui se répondent, 5 de chaque côté : elles sont garnies d'un morceau de glace, & servent, sans beaucoup de nécessité, les unes pour connoître si le sablier a besoin d'être monté, & les autres pour voir si le sable coule net, & sans embarras, afin d'y remédier sur le champ, supposé que quelque matiere dérangeât le coulage, comme je le dirai plus bas. Voilà, MM, pour ce qui regarde l'extérieur de cette piece, l'intérieur n'est pas si facile à développer.

Les pieces intérieures du Sablier.

LA caisse *KLM*, *Fig.* 3, qui forme le corps du sablier, est ici représentée hors de la chape de fer, j'en ai aussi retranché la planche *du devant* & celle *du derriere*, pour laisser voir la construction des entonnoirs : j'ai grossi cette figure pour y pouvoir détailler les petites pieces, mais c'est la même marquée *A B* dans la *Fig.* 1, & dans la même situation.... Cette caisse est divisée en trois parties, par deux fonds intermédiaires *NO*, *PQ*; les deux grandes parties *K* & *L*, tiennent la place des deux bouteilles des sabliers ordinaires, & la partie *M* peut être regardée comme le bouton des mêmes sabliers ordinaires.

Je leur donnerai ce nom pour abréger ma description.

Sur les fonds intermédiaires dont je viens de parler, vous voyez des pieces de bois attachées dessus & dessous, lesquelles forment la *coupe* ou *profil*, de 4 entonnoirs (2 droits, 2 renversés), dont les autres pieces de complément tiennent aux deux autres planches, retranchées de cette troisieme figure.

La piece courbée *MR*, qui paroît ici ne porter sur rien, est appuyée & fixe sur un support immobile, que je décrirai dans la *Fig. 6* : il suffit de sçavoir ici, que cette piece est une plaque de fer de 4 pouces de large, qui met à couvert la croix que vous voyez au-dessous, & qui outre cela, soûtient un cinquieme entonnoir immobile *R S*, qui est le *couloir immédiat* par où tout le sable s'écoule. Je lui donnerai aussi ce nom, pour le distinguer des 4 grands entonnoirs *mobiles* qui suivent le mouvement de la caisse quand elle tourne.

Après avoir montré la division du sablier en trois parties, il est tems d'expliquer comment se fait le passage du sable, & l'effet qu'il produit. Supposons donc que le sablier vient d'être tourné, & que la bouteille *K* est pleine de sable. 1°. Il est naturel que ce sable sorte par la pointe *S* du grand entonnoir *KTSV*, & comme ce sable, en sortant du grand entonnoir, rencontre le *couloir RS*, qui n'est qu'à deux lignes au-dessous, ce sable, dis-je, après avoir rempli le couloir *RS*, fait un petit tas au-dessus (que j'ai marqué par des points), & ce tas *engorge* le grand entonnoir, & ne lui permet de couler qu'à proportion que le *couloir* délivre le sable par le bas *R* : cela se fait successivement, sans que le sable puisse se répandre ailleurs.

2°. Le sable qui sort du couloir *RS*, rencontre au-dessous un des quatre creusets qui sont attachés sur la *croix*

tournante. Il y coule pendant une *minute* précisément; après quoi ce creuset, perdant l'équilibre, fait faire un quart de tour à la croix; par ce moyen, le creuset verse le sable qu'il contenoit, & un second creuset se trouve précisément sous le couloir, pour continuer à recevoir le sable. J'expliquerai ailleurs ce qui détermine cette croix à faire précisément & invariablement un quart de tour à chaque minute.

3°. Le sable qui sort du creuset lorsqu'il se renverse, tombe dans le grand entonnoir *XM*, & passe par un tuyau *X* qui se trouve ouvert, parce que le clapet *Y* est renversé par l'effet de son poids & de sa situation, comme la figure le fait voir. La traînée de points qui représentent le sable, aidera à l'explication. C'est de cette façon que tout le sable de la bouteille *K* traverse le bouton *M*, & vient se loger dans la bouteille *L* pendant 28 ou 30 heures, après quoi il faut retourner le sablier, si l'on ne veut pas qu'il s'arrête.

4°. Quand on retourne le sablier, & que la bouteille *L* pleine de sable commence à prendre le dessus, le clapet *Y* se ferme de la même façon que vous voyez l'autre clapet *V*, & celui-ci s'ouvre de la même façon que vous voyez le clapet *Y* dans cette troisieme figure.

REMARQUE.

Pendant ce tems-là, le sable qui se trouve dans le couloir *RS*, continue de s'écouler sans perte de tems, & il y en auroit pour fournir plus de 4 *minutes*: la croix tournante fait par conséquent ses fonctions, & *la mesure du tems n'est point interrompue tandis qu'on tourne le sablier*.

Il faut cependant tourner ce sablier rondement, surtout quand la bouteille pleine commence à prendre le dessus,

dessus, parce que le couloir n'étant pas alors sous le grand entonnoir, le sable sort en pure perte, & retombe en-bas sans toucher les creusets, qui sont à couvert. Il est vrai que le trou des grands entonnoirs n'étant que de 13 lignes de diametre, il ne se répand pas beaucoup de sable dans cet instant, mais il convient de le tourner lestement.

Explication détaillée du Couloir.

Le couloir, *Fig.* 4, que je n'ai pas pû détailler dans la *Fig.* 3, mérite de l'être ici en plus grand volume. Il est composé de 4 pieces, unies par un ressort, lesquelles peuvent être séparées dans le besoin, & réunies avec la même facilité. La premiere partie *MR*, dont j'ai déja parlé dans la troisieme figure, est une large plaque qui met à couvert la croix tournante, & soûtient tout l'assemblage du couloir, sçavoir la gorge 5, 6 qui est fixe; le tamis 1, 2 qui coupe le couloir en deux parties, & enfin le couloir proprement dit 3, 4, où il n'entre point de *sable* qu'après avoir passé par le tamis 1, 2.

Le tamis 1, 2 de métal, *Fig.* 5, est percé de 350 trous, quatre fois plus petits que le trou du couloir, en sorte que tout ce qui passe par un trou du tamis, ne peut occuper que le *quart* du trou du couloir, & par conséquent le couloir ne peut pas arrêter. Au reste, quand les parties grossieres boucheroient les trois quarts du tamis, il resteroit encore assez de jour pour fournir surabondamment au couloir. Cependant ce tamis qui se met en coulisse, peut être retiré de sa place quand on veut, par une porte fermée à clef, qui se trouve vis-à-vis; on jette les ordures qui peuvent s'y trouver, & on le remet en place sur le champ.

Usage du Tamis ou Crible.

Outre que le tamis sert continuellement à arrêter tout ce qui pourroit embarrasser le couloir, il sert encore pour découvrir en très-peu de tems tout ce qu'il peut y avoir de parties grossieres ou détachées du bois : car on ôte de place le couloir 3, 4, ne laissant que le tamis 1, 2, qui passe & repasse tout le sable en très-peu de tems, & fournit l'occasion de retirer tout ce qu'il peut y avoir de grossier.

Remarque touchant la Porte.

Quelque nouvelle & dangereuse que paroisse une porte à un sablier, laquelle peut, par son ouverture, donner entrée à quelque atome funeste, il faut ici raisonner différemment, & ne point envisager ce sablier sur le pied des sabliers ordinaires. Car 1°, on ne doit pas s'embarrasser de la perte de quelque peu de sable, attendu que la mesure n'en est pas fixe. 2°. Le couloir est ici fort grand, & d'une figure conique, il est d'ailleurs précédé d'un tamis qui arrête les ordures, & par conséquent les atomes ne sont pas à beaucoup près si dangereux que dans les sabliers ordinaires : mais d'un autre côté cette porte est infiniment commode pour retirer toutes les parties grossieres qui pourroient se détacher du bois ou du métal, & même dans un cas extraordinaire, où le couloir seroit engorgé, on peut le retirer, & le remettre sur le champ, sans rien changer de la justesse du sablier.

D'ailleurs, outre que cette porte ne s'ouvrira qu'en cas de besoin, & presque jamais qu'après une certaine épreuve, je suppose qu'on aura pour lors attention de le faire dans un endroit à l'abri du vent & de la poussiere,

& qu'elle ne restera ouverte que *deux instans*, l'un pour retirer le tamis, & l'autre pour le remettre.

Explication du Support intérieur.

Ce qu'on a le plus de peine à concevoir dans ce sablier, quand on ne voit pas l'intérieur, c'est une piece *immobile* placée au milieu d'une caisse *mobile*, en sorte que dans le tems que tout le sablier tourne de haut en bas, il y a une piece intérieure dans son milieu qui ne tourne jamais, & au milieu de cette piece *immobile*, il y en a une autre *mobile*, qui est la croix des creusets, le tout sans être sujet au moindre dérangement.... Les trois cercles ponctués de la *Fig.* 3 peuvent servir à en donner une idée. Le plus petit des trois cercles renferme la croix des creusets, qui est mobile, puisqu'elle tourne d'une minute à l'autre : tout ce qui est renfermé entre le petit & le moyen cercle, est immobile ; enfin tout ce qui est en dehors du plus grand cercle est mobile, & tourne toutes les fois qu'on retourne le sablier : l'espace entre le plus grand & le moyen cercle, est le jeu qu'il y a entre les pieces *mobiles* & celles qui sont *immobiles*.

Pour rendre ceci intelligible autant que je le pourrai, il faut considérer dans la *Fig.* 6 la chape de fer *CD*, dont j'ai retranché la caisse ou corps du sablier. Au milieu de cette chape, il y a une autre piece de fer *EFGH*, forgée d'une seule piece, laquelle a deux forts tenons *E*, *F*, & un espace vuide *GH*, dans lequel vuide se trouve placée la croix des creusets de la *Fig.* 3 & 7, que je représente ici de profil dans la *Fig.* 6.

Les deux tenons *E*, *F* du support *EFGH*, sont *ronds* aux endroits *E*, *F*, & *quarrés* dans l'épaisseur de la chape *CD*, ce qui rend ce support immobile, c'est-à-dire, in-

timement lié avec la chape, & ne faisant pour ainsi dire qu'une même piece.... Ce support *EFGH* ne paroît du tout point quand la caisse du sablier est en place, comme à la *Fig.* 2, parce qu'il est tout intérieur, & cette caisse porte entierement sur les deux tenons *E*, *F*, qui sont les mêmes de la *Fig.* 2. *I*, *H*, & que j'ai dit être *ronds*, afin que la caisse puisse tourner sans que la chape *CD*, ni le support *EFGH* tournent le moins du monde.

OBSERVATION.

Quoique le plan du support *EFGH* paroisse ici parallele au plan de la chape *CD*, il faut cependant se souvenir que je ne l'ai représenté de cette façon que pour me faire entendre; mais le plan du support croise directement celui de la chape: les parties *G*, *H* sont de niveau, quoiqu'elles paroissent ici l'une au-dessus, l'autre au-dessous; en un mot le plan de la chape est *vertical*, & celui du support *EFGH* est *horisontal.* Voyez-en la coupe en *G*, *H*, *Fig.* 4, où les côtés *G*, *H* sont représentés de niveau l'un derriere l'autre.

Communication du dedans au-dehors.

Toute la communication du dedans au-dehors se fait, *Fig.* 6, par un trou rond d'environ 4 lignes de diametre, percé dans le tenon *F* suivant sa longueur, dans lequel trou passe une baguette de fer *KL*, de 3 lignes de diametre. Cette baguette, que j'appellerai *baguette de communication*, sert d'arbre à la croix des creusets, *Fig.* 7 : elle a un pivot en *K* & un autre en *L*, sur lesquels elle tourne, emportant les creusets avec elle, comme ne faisant qu'une même piece. Cette baguette est appuyée du côté *K*

ſur le tenon *E*, & du côté *L* ſur un ſupport extérieur *MN*, que nous décrirons plus bas, en parlant de la roue des minutes.

Il faut encore ajoûter, que ſur le bout *L* de la baguette en queſtion, il y a une croix d'acier arrêtée ſolidement ſur ladite baguette, en ſorte que trois pieces n'en font qu'une, ſçavoir 1°. La baguette qui tient depuis *K* juſques à *L*. 2°. La croix des creuſets, *Fig.* 7, qui ſe trouve dans l'intérieur du ſablier au vuide *GH*. 3°. La croix d'acier fixée ſur l'autre bout de la baguette *L*, qui ſe trouve dans la quadrature, & par conſéquent hors du ſablier; l'un ne peut pas tourner ſans l'autre, & la croix d'acier repréſente dans la quadrature toutes les ſituations des creuſets qui ſont dans l'intérieur du ſablier.

Explication de la Quadrature.

La piece *A*, *Fig.* 8, eſt cette même croix d'acier dont je viens de parler, qui ſe trouve intimement unie avec la croix des creuſets, par le moyen de la baguette qui leur ſert d'arbre commun, en ſorte que l'une ne peut pas tourner ſans l'autre. Cela ſuppoſé, nous pouvons, pour la facilité de l'explication, prendre la croix d'acier *ACK* que *nous voyons*, pour la croix même des creuſets que *nous ne voyons pas*: chaque bras de cette croix repréſentera un creuſet.

Imaginons-nous maintenant que le ſable coule ſur le bras *K* (ou ce qui eſt le même, dans le creuſet qui lui répond), il eſt viſible que bien-tôt le poids de ce ſable chargeant le bras *K*, ébranlera la croix pour la faire trébucher; mais l'autre bras *C* qui lui eſt oppoſé, rencontrant le contre-poids *BCDE*, &c. (mobile au point *B*, & ſoutenu par la conſole *N*), toute la croix ſera retenue juſqu'à ce que

le sable qui coule sur le bras *K* puisse vaincre la résistance du contre-poids *BCD*, &c. alors le bras *K* trébuchera, & viendra en *L*; les trois autres bras auront tous changé de place; le bras *M* sera sous le couloir, & le bras *L* sous le contre-poids *BCD*, &c. & la croix restera dans la même situation, jusqu'à ce que le sable puisse soûlever de nouveau le contre-poids *BCD*, &c. & ainsi de suite; de sorte que le sable & le contre-poids se disputant mutuellement l'équilibre, il y aura un *repos* plus ou moins long, suivant que le contre-poids sera plus ou moins pesant.

Explication du Contre-poids.

Un des principaux avantages de ce sablier, est, sans contredit, de pouvoir être *avancé* & *reculé*, de tant & si peu que l'on veut, sans toucher au trou du couloir, qui demeure toûjours le même, & coule toûjours également. Cette facilité vient du contre-poids, qui se rend plus *pesant* ou plus *leger*, comme on veut, par le moyen d'un petit quarré qu'on peut tourner avec une clef, à droite, ou à gauche, de la même façon qu'on le pratique dans les montres de poche. En voici la construction.

Il y a une vis *DH* montée sur deux supports *CD*, *GE*, de telle façon qu'elle peut bien tourner en tout sens sur ses deux pivots, *D*, *E*, mais non pas avancer ni reculer, ce qui est cause que l'écroue *F* (assez pesante) avance vers *D*, ou recule vers *E*, à mesure que la vis tourne. Cette vis a une tête *HI* assez large, & divisée en 20 dents, lesquelles engrainent dans une vis sans fin, que je ne sçai pas représenter ici, mais dont le quarré perce à travers le cadran, entre les 17 & 18 minutes.... Quand on tourne à droite, l'écroue *F* se retire vers *EG*, & le contre-poids devient plus léger, & plus facile à soûlever : il

faut par conséquent moins de sable dans le creuset pour trébucher, & l'aiguille marche plus vîte, quoique le sable coule toûjours également: & quand on tourne à gauche, l'écroue *F* s'avance vers *CD*, le contre-poids devient plus pesant, il faut plus de sable dans le creuset pour pouvoir lever, & le sablier retarde, quoique le sable coule toûjours également.

Il faut remarquer en passant, qu'on peut faire avancer & reculer l'écroue d'un espace *presque infiniment petit*: car comme la tête de la vis *HI* est divisée en 20 dents, & que la vis sans fin n'en fait passer qu'une à chaque tour, il s'ensuit qu'un demi-tour de clef ne fait avancer l'écroue que de la 40me partie d'un filet de la vis, &c.

Explication de la Surprise.

Je l'avouerai ingénûment: je m'étois flatté que le contre-poids de la *Fig.* 8 seroit suffisant pour retenir les creusets dans la situation convenable pour bien agir; mais je fus fort étonné, lorsque mon sablier étant presque fini, je reconnus le contraire. Le sable qui s'accumule dans le creuset pendant une minute, le fait trébucher avec tant de force, quand une fois il a soûlevé le contre-poids, qu'il faisoit un demi-tour au lieu de ne faire qu'un quart; il passoit deux bras tout de suite, ou bien il ne restoit pas précisément sous le contre-poids, & pour lors le creuset n'étant pas directement sous le couloir, la machine ne tournoit plus. J'étois trop avancé pour reculer; il fallut trouver un expédient, & j'en vins à bout: le voici aussi simple que solide.

La piece *ABC*, *Fig.* 9, étant mobile au point *B*, & plus pésante dans sa partie *A* que dans sa partie *C*, se remet d'elle-même dans la situation où elle est actuelle-

ment, sitôt qu'on la laisse à sa liberté. La piece *DEF* représentant *une jambe & un pied*, est mobile au point *E*: elle porte une cheville *F*, qui se trouve engagée dans la fente *FG*, de maniere qu'elle peut couler tout le long, autant que le jeu le demande. Au seul aspect de la figure, on connoît que la piece *ABC* ne peut pas remuer qu'elle ne communique un mouvement contraire à la jambe *DEF*, par la communication de la cheville *F*. Ainsi quand le bras de la croix d'acier part avec force pour trébucher, il rencontre 1°, la partie *C*, qu'il chasse vers *H*, & dans le même tems le pied *D* s'avance vers *I*.... 2°. Le bras ayant achevé de glisser le long de la partie *C*, il rencontre le pied *D* au-dessous, qui s'oppose à son passage, & l'arrête tout court. Mais 3°, dans le même instant la partie *C* qui n'est plus gênée, se remet par son propre poids dans sa premiere situation, & par une suite nécessaire, le pied *D* se retire aussi de-dessous le bras de la croix, & celui-ci trouve le passage libre, comme si rien ne s'y étoit opposé : il ne lui reste que le contre-poids à soûlever, & toutes les fois qu'il échape, le pied *D*, que j'appelle *la surprise*, ne manque pas de l'arrêter au premier instant, & de se retirer tout de suite pour laisser le passage libre.

Explication de la Roue des minutes.

J'ai dit plus haut que je ferois voir le support qui soûtient le pivot *L* de la *Fig. 6*. Ce support est une traverse de fer *LM*, *Fig. 10*, arrêtée solidement avec deux vis dans la boîte ou quadrature *NOPQ*, distante du fond d'environ 4 lignes, pour laisser le jeu nécessaire à la croix d'acier *KC*.... Le pivot *L* qui est le bout de la *baguette de communication*, porte 4 chevilles, lesquelles engrainent dans la roue *RST* de 60 dents; de sorte que le pivot *L* faisant

faisant son tour en 4 minutes, après 15 tours de ce pivot, la roue des minutes aura fait un tour, & par le moyen du contre-poids dont nous avons parlé à la *Fig.* 8, il est facile de la faire aller aussi juste qu'on voudra. L'arbre *R* de la roue *RST* qui passe au-travers du cadran, porte une aiguille qui marque les minutes, sautant tout-à-coup de l'une à l'autre, à mesure que le creuset trébuche.

PREMIERE OBSERVATION.

Comme on pourroit s'imaginer que le peu de force qu'il faut pour mener cette roue, pourroit cependant en certaines occasions retenir le creuset plus long-tems qu'il ne faut, & causer du dérangement, il est bon de faire remarquer que les chevilles du pivot *L* n'agissent sur les dents *S* de la roue, que lorsque le creuset a déja trébuché en partie, & qu'il est dans toute la force de *sa chûte*, & par conséquent cette roue ne peut porter aucun obstacle à la liberté que doivent avoir les creusets.

II. OBSERVATION.

Outre que cette roue est fort libre, j'ai eu attention de faire une aiguille, laquelle quoique grossiere, ne pese pas plus d'un côté que de l'autre.... Enfin sous la queue de cette aiguille, il y a une cheville, qui, à chaque tour, fait passer une *dent* d'une étoile de 24, laquelle porte les heures, & les laisse voir à travers une ouverture quarrée qui est au bas.



Réflexions sur la justesse qu'on peut se promettre d'un pareil Sablier, exécuté par un habile Ouvrier.

Le modele que j'ai fait de ce sablier, suivant toutes ses proportions, & qui sera présenté à l'Académie, ainsi que celui de l'autre instrument, auquel je travaille sans relâche : ce sablier, dis-je, n'est pas exécuté, à beaucoup près, avec toute la justesse dont il est susceptible. 1°. Parce que la premiere exécution d'une nouveauté est toûjours fort imparfaite, mais *inventis addere facile est.* 2°. Parce qu'il y a peu de pieces qui n'ayent été retouchées deux ou trois fois, suivant les inconvéniens que je trouvois en chemin ; & quand il s'agissoit de pieces principales, j'ai fait servir les mêmes, pour ne pas multiplier la dépense, qui est déja assez considérable, eû égard à l'incertitude du dédommagement. 3°. Parce qu'à l'exception des pieces de forge, & du boisage, j'ai généralement fait tout le reste par la lime, vis en fer, vis en bois, pieces en fer-blanc, &c. Cette voie m'a paru la plus praticable, soit par la difficulté qu'il y a de se faire bien entendre des ouvriers, soit par la crainte d'exposer trop son secret, soit enfin pour diminuer la dépense ; & l'on sent bien que je ne dois pas avoir la dextérité d'un ouvrier qui travaille d'habitude. Par exemple, les deux pivots sur lesquels roule la *croix* des creusets, ont plus d'une ligne de diametre, tandis qu'un bon ouvrier, en les passant sur le tour (ce que je n'ai pas fait), ne leur auroit pas donné demi-ligne, & qu'ils seroient par-là beaucoup plus libres ; & ainsi de tout le reste. Cependant, malgré toutes ces imperfections, ce sablier égale la justesse de nos pendules à ressort.

I. *Réflexion.* Si l'on met dans ce sablier la quantité de sable nécessaire pour couler au-delà de 24 heures, que ce

sable soit d'ailleurs homogene, & passé par le crible des sabliers ordinaires, il est plus que probable qu'il coulera toûjours par le couloir d'une maniere égale : car 1°, le trou est fort grand, puisqu'il délivre 25 onces par heure poids de marc. 2°. Il est fait en entonnoir, & cela ôte toute idée du séjour de certains gros grains, qui pourroient en boucher une partie. 3°. Le tamis qui est au-dessus, arrête tout ce qui pourroit mettre obstacle à l'uniformité du coulage. 4°. Le passage de l'air ne fait point ici la même résistance que dans les sabliers ordinaires ; car dans ceux-ci, l'air & le sable se disputent mutuellement le passage, & lorsque l'air est plus ou moins épais, il en doit résulter une différence : mais dans le sablier que je propose, l'air n'a rien à démêler, pour ainsi dire, avec le sable, parce qu'il a une libre communication, comme on le verra dans le modele, & comme on le conçoit à la *Fig.* 3, où le couloir est environné d'air de tout côté. C'est pour cette raison que dans mon sablier, le sable forme un filet uni comme un filet d'eau, tandis que dans les sabliers ordinaires, ce filet est continuellement & visiblement interrompu par le passage de l'air. 5°. Le sable est toûjours à une même élévation au-dessus du couloir, lequel est toûjours également fourni. 6°. Quand l'humidité colleroit ensemble plusieurs grains de sable, ils resteroient sur le tamis, & le reste couleroit toûjours.

II. *Réflexion.* Si le sable coule uniformément, les creusets trébucheront uniformément ; c'est-à-dire, que les 4 ensemble feront leur tour dans une égale durée : car il y a dans mon modele 2 ou 3 secondes de différence d'un creuset à l'autre (ce qui provient de la mauvaise exécution), mais cela se retrouve dans le tour entier, & cela suffit pour la justesse en général. Une habile main évitera facilement ce défaut dans un autre sablier, en observant

mieux les proportions, que je n'ai pû le faire moi-même.

III. *Réflexion.* Quoique la longue description que je viens de faire, présente une grande quantité de pieces, qui forment en apparence une machine fort composée, il faut faire attention que toutes ces pieces sont fixes, à l'exception de la principale, qui est la piece des creusets; c'est la seule dont les pivots pourront s'user par la suite, mais il faudra bien du tems, car la résistance est peu de chose : à l'égard des pieces qui sont dans la quadrature, outre qu'il y en a peu, on sçait bien que nos horloges à roüage ne manquent gueres par-là, parce que la lenteur du mouvement & la façon *inverse* dont ces pieces agissent, contribuent également à leur durée.... La piece des creusets, qui doit être regardée tout-à-la-fois, comme le *premier & dernier mobile*, n'est pas à beaucoup près si fatiguée que le dernier mobile des pieces à roüage. Ainsi ce sablier une fois bien réglé, doit se soûtenir beaucoup plus long-tems qu'une piece à roüage.

IV. *Réflexion.* La propriété qu'a ce sablier, de marquer même pendant le tems qu'on le retourne, est un avantage pour la justesse qui doit faire plaisir, & sa durée pendant un jour entier est encore bien estimable.

V. *Réflexion.* La maniere dont ce sablier marque les minutes, a quelque chose de plus précis que celle d'une pendule ordinaire, par le bruit qui se fait à chaque minute, lequel s'entend très-distinctement, & détermine précisément *la fin de la minute & le commencement de l'autre*; au lieu qu'on est toûjours incertain, sur les cadrans ordinaires, du véritable instant où commence & finit chaque minute.

VI. *Réflexion.* Les agitations du vaisseau ne sçauroient causer le moindre dérangement à mon sablier, parce qu'il est fort pesant & bien suspendu : tout balance à la

fois, & rien ne se dérange. C'est ainsi que certaines personnes adroites, mettent un verre plein d'eau dans un cerceau qu'elles tiennent à la main, elles l'agitent peu à peu, le font ensuite tourner entierement sens-dessus-dessous, & l'eau qui est dans le verre ne se répand pas, quoique le verre se trouve en passant dans une situation tout-à-fait renversée. J'ai souvent fait balancer mon sablier par des vibrations de plus de deux pieds, qui duroient plus d'un quart-d'heure, sans que cela ait rien changé à la justesse.

REMARQUE.

Il faut observer en passant, que si l'on retournoit le sablier dans le tems que le creuset va trébucher, on le feroit trébucher plutôt; c'est pourquoi on ne doit le tourner qu'après que la minute a frappé, car pour-lors il n'y a rien à craindre, quelques secousses qu'on lui donne. On en doit faire de même pour avancer ou reculer, quand on tournera avec la clef le quarré du contre-poids, observant toûjours que ce soit dans le commencement de la minute, & non sur la fin.

Derniere Réflexion. Quand j'ai fait mon sablier de plus de 24 heures, ç'a été dans le dessein que si je ne méritois pas le Prix, cette Piece pût servir à quelque particulier, & que mon déboursé pût me revenir, & un particulier ne voudroit pas d'un sablier qu'il faudroit tourner deux fois par jour : mais comme dans un vaisseau on a des personnes attentives pour veiller à ces sortes de choses, si l'on réduisoit ce sablier à 13 ou 14 heures, en laissant subsister la même quantité de sable, il couleroit la moitié plus gros; l'aiguille feroit deux tours par heure, chaque minute du cadran deviendroit une demi-minute, & ce sablier seroit totalement à l'abri de toute sorte d'arrêt &

d'inégalité de coulage. Le poids du ſable détermineroit plus ſubitement la chûte de chaque creuſet, & je penſe que la juſteſſe ſeroit plus aſſûrée : il ne faudroit pour cela qu'un ſecond couloir, qu'on mettroit à la place de l'autre. Si j'ai du tems, j'en ferai l'épreuve.

Si de tels commencemens peuvent mériter l'attention de mes Juges, il y a tout lieu d'eſpérer que cette Piece ſera un jour portée à la perfection qu'on peut déſirer pour le ſervice de la marine.



SECONDE PARTIE.

SUIVANT la premiere Partie de ce Mémoire, je viens d'exécuter en grand ce qui ne se fait ordinairement qu'en petit volume : & dans cette seconde Partie, je vais donner les moyens de réduire en petit volume (& sans diminuer les proportions), une chose qui paroît ne pouvoir être exécutée qu'en trés-grand volume.

I. PROBLEME.

Trouver le moyen de faire un Cadran Solaire équinoctial & universel, dans un cercle de 29 pouces de diametre, *marquant* 1°, *les heures.* 2°. *Les minutes une à une.* 3°. *Les secondes de 5 en 5 très-distinctement, de sorte que l'image du Soleil parcoure réellement & visiblement* $2\frac{1}{2}$ *pouces par minute, ou* $2\frac{1}{2}$ *lignes par 5 secondes, ce qui, suivant les proportions ordinaires, ne paroît pouvoir s'exécuter que sur un cercle de* 100 *pieds de diametre.*

Comme cette proposition paroît impossible & chimérique, je crois devoir avertir en passant, que je ne suis pas novice dans la théorie & dans la pratique de toute sorte de cadrans solaires ; ainsi l'on peut suspendre son jugement jusqu'aux preuves, & si je ne me fais pas assez bien entendre, il y sera suppléé par le modele que je fais exécuter, & qui partira avec celui du sablier.

DESCRIPTION.

C'est à la *réfraction* & à la *réflexion* des rayons du

Soleil, qui sont connues de tout le monde, que je dois l'idée de ce cadran, lequel, à ce que je crois, n'est encore connu de personne; car supposé qu'une pareille idée fût venue à quelqu'un avant moi (ce que j'ignore), il seroit moralement impossible que nous nous fussions entierement rencontrés dans l'exécution.

La principale piece de ce cadran, est une boîte quarré-longue *ABCD*, &c. *Fig.* 11, formant une espece de *chambre obscure*, de 22 pouces de long *AC*; de 12 pouces de large *AB*, & de 8 pouces de hauteur *AG*. Le dedans est tout peint en noir, à l'exception du fond *DCH*, qui est blanc, & le dehors est tout verd, pour la propreté seulement. Il n'y a d'autre ouverture que celle marquée *EF*, d'environ deux pouces de largeur, pour pouvoir observer les minutes & les secondes; car pour les heures on les voit ailleurs.

Pour abréger l'explication, j'appellerai cette chambre obscure la *chambre* tout court. Le fond d'en bas sera *CHLD*; l'opposé *BAG* sera celui d'en-haut. *ABDC* s'appellera le dessus; le dessous *GHL*, & les côtés seront *GIEH*, & *KFDL*. La chambre est soûtenue sur deux pivots *I*, *K*, placés au milieu des deux côtés; sur lesquels elle peut tourner à volonté du Sud au Nord, & du Nord au Sud.

L'intérieur de la Chambre obscure.

La *Fig.* 12 représente la *Chambre* couchée sur une table, n'ayant ni le dessus, ni les côtés, mais seulement le dessous *LMN*, avec les deux fonds, dont *NP* est le fond d'en-bas, & *OM* le fond d'en-haut.... *QR* est une lunette d'*approche* ou de *longue-vûe*, d'un pied de long. L'objectif *Q* est tourné vers le Soleil-levant *S*, que nous supposerons au véritable équinoxe, car ce jour-là, à 6 heures précises,

cises, la chambre doit être dans la situation de la *Fig.* 12 ; l'oculaire par conséquent de la lunette, est tourné vers le fond d'en-bas *NP*.

1°. Le rayon *RT*, après avoir souffert plusieurs réfractions dans la lunette, rencontre une petite glace de miroir *TN*, de deux pouces de large, & un peu inclinée, pour que le rayon ne retourne pas dans la lunette. 2°. La glace *TN* renvoie ce rayon sur une seconde glace *VY*, attachée au fond d'en-haut, & plus large au double que celle d'en-bas. 3°. Enfin, la glace *VY*, réfléchit ce même rayon sur le fond d'en-bas à l'endroit *Z*, où l'image du Soleil marque, par son mouvement, les minutes & les secondes, comme nous l'expliquerons plus bas.

Il faudroit absolument voir l'effet que produit *cette lunette avec ces deux miroirs* pour pouvoir s'en former une idée. L'image du Soleil, qui n'a gueres que 6 lignes de diametre au point *T*, en a près de 30 au point *VY*, & 5 pouces au point *Z*. Son mouvement de *trépidation* imite celui qu'on voit dans les grandes Eglises, quand les rayons percent à-travers un trou de vitre, & elle parcourt ici $2\frac{1}{2}$ pouces par minute.

La *Fig.* 13 est une répétition de la 12, présentée dans un autre sens. Dans la *Fig.* 12, j'ai représenté les choses *en profil*, & dans la 13 je les présente *de face*; & comme le dessous de la chambre étant présenté de face, les deux fonds d'en-haut & d'en-bas seroient vûs en profil, & que je ne pourrois pas désigner les figures qui y sont tracées; j'ai pris le parti d'*applatir* ces deux fonds, pour les mettre dans un même plan avec le dessous de la chambre. Ainsi *MN* est le dessous de la chambre, *NP* est le fond d'en-bas *applati*, & *OM* est le fond d'en-haut aussi applati, comme s'il y avoit des charnieres aux jointures *M* & *N*.

Reprenons maintenant chaque chose en particulier.

Dans cette *Fig.* 13 *QR* eſt la lunette arrêtée ſolidement au-milieu du *deſſous* de la chambre, à 4 ou 5 lignes d'élévation parallele... *T* eſt le premier miroir, *VY* eſt le ſecond miroir... *R* 1 2 3 *Y* 4 5 6, & *R* 7 8 9, *V* 10 11 12, ſont deux rayons extrêmes, entre leſquels il faut en imaginer une infinité d'autres qui ſe ſuccedent; ou bien, ſi l'on veut, on peut s'imaginer que le premier & le ſecond ſont les mêmes, qui ne different entre eux que par la poſition locale, & pour-lors il faudra s'imaginer que depuis *AB* juſqu'à *CP*, ils ont paſſé ſucceſſivement par tous les points imaginables.

I. *Suppoſition.* Je ſuppoſe que la longueur *AP* eſt de 12 pouces & demi, quoiqu'elle ne ſoit réellement que de 12 pouces. J'expliquerai plus bas ce que devient ce demi-pouce ſuppoſé.

II. *Suppoſition.* Je ſuppoſe que l'image du Soleil *S* parcourt $2\frac{1}{2}$ pouces par minute. Cette ſuppoſition eſt d'autant plus admiſſible, qu'il ne s'agit que d'*allonger* ou *raccourcir* la chambre, pour avoir cette proportion à ſouhait.

III. *Suppoſition.* Je ſuppoſe l'eſpace *AP* partagé en 5 parties égales de $2\frac{1}{2}$ pouces chacune, qui feront 5 minutes, & chaque partie en 12 autres de $2\frac{1}{2}$ lignes, qui marqueront les ſecondes de 5 en 5.

IV. *Suppoſition.* Je ſuppoſe que la chambre étant bien placée, l'image du Soleil, qui eſt d'environ 5 pouces de diametre, remplira ſucceſſivement tout l'eſpace renfermé entre les deux bornes *AP*, *CB*; & que pour peu que cette poſition de la chambre ſoit changée, l'image du Soleil franchira l'une ou l'autre des deux bornes, & cette image paroîtra tronquée.

V. *Suppoſition.* Parmi une infinité de rayons qui peignent l'image du Soleil, je n'en prends qu'un de ceux qui peignent le limbe *antérieur*.

VI. *Suppoſition.* Je ſuppoſe qu'il eſt préciſément 11 heures 55 minutes, & que la chambre étant bien placée, le rayon *R* 1 2 3 *Y* 4 5 6 arrive au point 6.

PREMIERE OPERATION.

Suivant cette derniere ſuppoſition, à 11 heures 55 minutes, l'image du Soleil étant totalement hors de la chambre, le limbe antérieur commencera à ſe montrer au point 6, & s'avançant ſucceſſivement, ce même limbe marquera en paſſant les ſecondes de 5 en 5, & les minutes 1 à 1... Il eſt certain, ſuivant la deuxieme ſuppoſition, qu'à midi précis, le limbe antérieur arrivera au point 5 12 5, (l'image du Soleil étant alors toute entiere dans la chambre obſcure.

PREMIER COROLLAIRE.

Nous venons de voir l'opération de ce cadran pendant 5 minutes d'heure, il n'eſt plus queſtion que de trouver un moyen ſûr de répéter la même opération toutes les fois qu'on voudra, par des *obſervations ſuivies ou non ſuivies*, de 5 minutes chacune, pendant tout le tems que le Soleil ſera ſur l'horiſon.

Pour rendre cela praticable, il faut ajoûter à la *chambre obſcure APMQR*, de la 14e *Fig.*, un cercle *BCD*, qui repréſentera l'équateur. Ce cercle ſera partagé en 24 parties égales, qui répondront aux 24 heures du jour, chacune de 15 degrés. Il faut faire dans les 24 diviſions autant de coches égales, & tracées avec préciſion... Il faut encore ſoûdiviſer ces 24 parties en 12 parties chacune, pour les minutes de 5 en 5, & y faire de ſemblables coches, avec la même juſteſſe. La petiteſſe de la figu-

re ne me permet pas de tracer ici toutes ces coches, qui sont au nombre de 288 sur toute la circonférence.

L'espace d'une coche à l'autre tant plein que vuide, vaudra 1 degré 15 minutes, qui est la portion de l'équateur que le Soleil parcourt dans 5 minutes d'heure... Au-dessus de l'équateur, doit être une piece coudée *EF*, mobile au point *F*, dont le talon *E* remplira exactement le vuide de chaque coche.

Sur le plat de l'équateur, j'ai marqué les 24 heures en chifres *Romains*, dans un ordre renversé; & de 3 en 3 coches, il y a ces nombres marqués, 15, 30, 45, qui signifient les minutes pour le *quart*, la *demie*, & les *trois quarts* de l'heure. Les 60 ne se marquent pas, parce que le chifre Romain y supplée: je ne marque pas non plus les chifres intermédiaires, 5, 10, 20, 25, &c. parce que la chose n'est pas nécessaire.

II. OPERATION.

Pour l'intelligence de ce que j'ai à dire, il faut reprendre la chose où nous l'avons quittée dans la premiere opération. Nous avons vû qu'à 11 heures 55 minutes, le Soleil étoit au point *A*, *hors de la chambre*, & à midi précis au point *P*, *dans la chambre*. Je dis au point *A* & au point *P*, parce que j'ai employé dans cette 14e *Fig.* les mêmes lettres qui servoient dans la 13e pour plus grande facilité.

Si, après avoir vû arriver le limbe antérieur du Soleil au point *P* (qui faisoit midi précis), nous faisons tourner le cercle *BCD* de la valeur d'une coche, ou de la 288e partie du cercle, & que nous mettions le talon *E* dans cette seconde coche *D*, il arrivera 1°, que la chambre *APMQR*, qui est attachée sur l'équateur, aura aussi tour-

né de la valeur d'une coche, qui eſt 1 degré 15 minutes de l'équateur, ou 5 minutes d'heure. 2°. Puiſque l'eſpace *AP* eſt de 5 minutes d'heure, ſuivant la troiſieme ſuppoſition, le cercle de l'équateur ayant *devancé* la marche du Soleil de la valeur de 5 minutes d'heure, le rayon du Soleil aura *reculé* d'autant, & au lieu de ſe trouver en *P*, où il étoit arrivé, il ſe retrouvera en *A* comme dans la premiere opération, & continuera ſa marche de *A* vers *P* pendant 5 minutes d'heure, de ſorte que quand le rayon ſera arrivé précisément en *P*, il ſera précisément midi & 5 minutes.

III. Operation.

Devançons encore la marche du Soleil, en mettant le talon *E* dans une troiſieme coche *G*; le rayon ſe retrouvera encore au point *A*, d'où il marchera vers le point *P* pendant 5 autres minutes, & lorſqu'il y ſera arrivé, il ſera midi & 10 minutes.... On pourra continuer de devancer la marche du Soleil, de 5 en 5 minutes, en mettant ſucceſſivement le talon *E* dans les coches *H*, *I*, & ainſi de ſuite, auſſi long-tems qu'on aura envie d'obſerver le Soleil.

Premiere Observation.

Je ſuppoſe toûjours que c'eſt le jour des équinoxes, auquel jour la chambre peut être conſidérée comme étant dans le plan de l'équateur. Nous parlerons plus bas des moyens de ſuivre la déclinaiſon du Soleil.

II. OBSERVATION.

Je ne crois pas qu'il soit besoin de prouver que chaque coche de l'équateur fait revenir le rayon au point *A* précisément ; car, puisque nous supposons d'un côté que le rayon parcourt l'espace *AP* dans 5 *minutes d'heure*, & que de l'autre côté, nous sçavons que le Soleil parcourt 1 degré 15 minutes dans 5 *minutes d'heure*, il est clair que ces deux espaces *équivalent l'un à l'autre*, & par conséquent, l'on ne peut pas faire avancer l'équateur d'une coche, sans faire rétrograder le Soleil de tout l'espace *PA*... Si cependant cela paroissoit douteux, faute d'explication de ma part, on peut s'en rapporter aux expériences que j'en ai faites, en attendant que le modele le fasse voir clairement.

III. OBSERVATION.

Il n'est pas nécessaire, pour la justesse de l'observation, de changer la coche précisément au moment que le rayon est arrivé en *P* : on peut le faire à son aise, sans se presser, & sans qu'il puisse en arriver la moindre erreur, parce que le Soleil fait toûjours son chemin ; & au lieu que le rayon se seroit trouvé précisément en *A*, si l'on avoit changé la coche sans aucune perte de tems, le même rayon se trouvera d'autant plus avancé sur la marche de *A* vers *P*, que l'on aura mis plus de tems à changer la coche, marquant toûjours avec la même justesse sur les divisions des minutes.

Il en seroit de même si l'on changeoit la coche avant que le rayon fût arrivé en *P* ; il seroit quelque tems sans se montrer en *A*, après quoi il y paroîtroit au moment

précis qu'il auroit dû y paroître, si l'on avoit changé la coche dans l'instant précis.

IV. Observation.

C'est pour cette raison que le demi-pouce qui manque à la largeur *AP*, suivant la premiere supposition, ne cause aucune erreur, parce que ce demi-pouce est censé hors de la chambre ; il faut seulement commencer les divisions des 5 minutes au point *P*, donnant à chacune 2 $\frac{1}{2}$ pouces, & la derniere du côté *A*, se trouvera plus petite d'un demi-pouce, qui sera censé hors de la chambre, & pour la perte du tems qu'on met à changer la coche.

V. Observation.

C'est à présent qu'on conçoit comment l'image du Soleil peut parcourir un espace de 150 pieds en 12 heures de tems, ou 12 pieds & demi en une heure de tems, dans un cercle qui n'a que 29 pouces de diametre : c'est en répétant souvent sa marche sur le même espace. Deux moyens concourent à cela : l'un est la *réfraction* & *réflexion* des rayons qui grossissent les intervalles de la marche du Soleil, & l'autre est cette maniere aisée de *devancer* la marche du Soleil, pour lui présenter 12 fois par heure le même espace à parcourir.

VI. Observation.

Ce Cadran, qui n'est encore décrit qu'en partie, est d'un usage immanquable sur terre, & chacun peut se donner sur la plus petite terrasse un *Observatoire raccourci*, qui, à cet égard, équivaudra à la méridienne de l'Observatoire même de Paris, ou de S. Sulpice, avec cette différence que la chambre obscure marquera toutes les heures du jour : car si l'on donnoit seulement 3 pieds à la chambre

obſcure, ou ſi l'on y employoit une meilleure lunette, on auroit une image beaucoup plus grande, & qui parcourroit de beaucoup plus grands eſpaces.

VII. OBSERVATION.

Dans tout ce que je viens de dire juſqu'ici, je ſuppoſe un équateur dont les poles ſoient fixes ſur terre, & l'on ne peut me faire d'autre difficulté, que l'inégalité qui pourroit ſe trouver dans les diviſions de cet équateur : mais la choſe n'eſt pas impoſſible, diſons même ſi difficile, ſurtout aux habiles ouvriers ; & quand une fois cet équateur ſera bien diviſé, il ne peut plus arriver de dérangement ; s'il eſt bon un jour, il ſera bon toûjours. Nous verrons de quelle façon je compte pouvoir l'employer ſur mer.

De la déclinaiſon du Soleil.

Pour que ce Cadran puiſſe ſervir toute l'année, il faut que la *chambre obſcure* puiſſe imiter les deux mouvemens du Soleil. Elle imite ſon mouvement diurne, en ſuivant le mouvement de l'équateur à meſure qu'on *change les coches*, & par-là elle tourne, comme cet équateur, ſur les poles du monde. Il faut encore qu'elle imite ſon mouvement annuel, & pour cela il faut qu'elle ait deux autres poles aux deux points de *6 heures*, c'eſt-à-dire, au véritable *levant* & véritable *couchant*.

La *Fig.* 14 nous ſervira encore pour expliquer une partie de ce ſecond mouvement. A côté de la chambre *APMQR*, vous voyez deux traverſes *KL*, *NO*, qui ſont arrêtées avec des vis ſur le cercle de l'équateur... Au milieu de ces deux traverſes il y a deux autres vis *S*, *T*, qui ſoûtiennent la chambre *APMQR*, & lui ſervent de poles;

les ; en ſorte que cette chambre roulant ſur ces deux vis, peut faire un angle avec le plan de l'équateur (tant vers le Sud que vers le Nord), de la même quantité de degrés que la plus grande déclinaiſon du Soleil.

ADBC, *Fig.* 15, repréſente le profil de la chambre obſcure : elle eſt mobile du Nord au Sud, & du Sud au Nord au point *I*, qui eſt ſon centre. *CD* repréſente le plan de l'équateur, que je ſuppoſe dans une élévation de 45 degrés... *F*, *E* ſont les deux poles de l'équateur; *F* eſt le pole Méridional, & *E* le pole Boréal... Sur le haut de la chambre *AD*, eſt fixé un arc de Méridien *GADH*, de 47 degrés, pour la déclinaiſon du Soleil vers l'un & l'autre pole. Cet arc, dont le diametre eſt d'environ 22 pouces, eſt diviſé en 23 degrés de chaque côté, avec une coche à chaque diviſion.

Voilà de quoi ſuivre la déclinaiſon du Soleil degré à degré ; mais comme cette déclinaiſon n'augmente pas, ni ne diminue pas préciſément d'un degré par jour, il faut encore pouvoir partager chaque degré en 60 parties, afin de pouvoir imiter parfaitement la déclinaiſon du Soleil minute à minute, telle qu'elle eſt marquée dans les Tables dreſſées par les Aſtronomes.

Chaque degré de l'arc *GADH*, n'étant que d'environ 2 $\frac{1}{4}$ lignes, il ſeroit impoſſible de le diviſer en 60 parties ſenſibles : cependant, comme la chambre obſcure groſſit les objets, & qu'une très-petite partie du méridien produit un changement ſenſible dans cette chambre, il faut uſer d'expédient pour rendre cette diviſion ſûre & ſenſible tout-à-la-fois.



Minutes de degrés pour la déclinaison du Soleil.

La *Fig.* 16 ne differe de la 15 que par quelques additions qu'il faut expliquer séparément. La premiere addition est la piece *NPOQR*, qui sert pour marquer les minutes de la déclinaison du Soleil. Cette piece est mobile au point *P*, où elle tient par une vis qui lui sert de centre. Depuis le centre *P* jusques en *O*, elle a 15 lignes; & depuis le même centre *P* jusques à l'arc *QR*, elle a 18 pouces 9 lignes, sa longueur totale étant d'environ 20 pouces. Il y a au point *O* une cheville par-dessous, qui entre dans les coches de l'arc *GADH*, & en remplit exactement la largeur... A-travers l'arc *QNR*, qui ne fait qu'une même piece avec *NPO*, à-travers, dis-je, l'arc *QNR*, on voit une ouverture *QR*, d'environ 30 lignes de long. Dans cette ouverture est une vis fixe *N* (servant d'*index*), laquelle, ainsi que la vis *P*, est arrêtée sur la traverse *LM*, dont nous parlerons bien-tôt. Le long de l'ouverture *QR*, sont marquées 30 divisions, un peu inégales sur les extrémités, dont chacune vaut 2 minutes de degré, avec une suite de chifres qui commencent en *R*, & finissent en *Q*.

La deuxieme addition consiste dans les deux traverses *EF*, *LM*, qui forment une croix, à laquelle répond une autre croix pareille qu'il faut imaginer *cachée* derriere celle-là. Ces deux croix sont à environ 9 pouces de distance l'une de l'autre, ayant entre deux la chambre obscure *ADCB*, à laquelle elles servent de support. La traverse *LM* est la même que vous voyez en *NO*, *Fig.* 14... Cette traverse *LM*, & celle qui lui répond, soûtiennent l'équateur, dont le plan est ici caché sous la même traverse; & la traverse *EF*, avec celle qui lui répond, servent de po-

les au même équateur. Elles sont liées par les deux bouts, comme vous voyez à la *Fig.* 17, ayant au milieu deux tenons *E*, *F*, qui servent de poles à l'équateur.... Dans la même *Fig.* 17, le cercle ponctué *LMTS*, représente l'équateur, & l'autre ponctué *EBFC*, représente le méridien.

La troisieme addition est le cercle *LEMF*, *Fig.* 16, qui est le méridien divisé en 360 parties, avec un petit trou de deux en deux divisions, dont je n'ai marqué ici que quelques-unes, par rapport à la petitesse de la figure. Ce méridien (qui n'est pas encore fait) sera composé de deux cercles égaux, arrêtés parallelement l'un à côté de l'autre, à une distance d'environ 8 degrés, affermis d'ailleurs par des traverses d'espace en espace. Cette précaution m'a paru nécessaire, parce que s'il n'y avoit qu'un cercle pour le méridien, son épaisseur intercepteroit les rayons du Soleil tous les jours précisément à midi, en sorte que l'heure du jour la plus remarquable, seroit celle qu'on ne trouveroit jamais sur ce cadran : mais au moyen de deux méridiens paralleles, distans de 8 degrés, la lunette se trouvera entre deux, & marquera un quart-d'heure *avant*, & un quart-d'heure *après* midi, sans interruption. Les deux méridiens intercepteront les rayons, le premier un peu après 11 heures & demie, & le second un peu avant midi & demi, & tout le reste du jour sera à découvert, comme on peut voir, *Fig.* 14, où les deux méridiens sont ponctués en *vx*, *yz*.



Minutes de degrés pour le Méridien.

Pour rendre ce cadran universel, il faut pouvoir le suspendre 1°, par chaque degré du méridien. 2°. Non-seulement par chaque degré, mais encore par chaque minute de degré. Le premier cas est facile, parce que chaque degré ayant un peu plus de 3 lignes de large, on peut percer un trou à chaque division, & par le moyen de ces trous, on le suspendra par le degré que l'on voudra. A l'égard du second, la chose n'est pas si aisée, eu égard à la petitesse de l'instrument. Je crois avoir trouvé deux moyens de le faire; je vais les expliquer séparément, & je me déterminerai dans la suite pour celui qui sera le plus facile à exécuter.

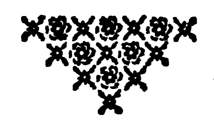
Le premier que j'ai imaginé, consiste dans une piece de fer *ABCDE*, *Fig.* 18. Les deux trous *A*, *B*, sont percés à la distance précise de trois degrés du méridien, & peuvent être changés d'un degré à l'autre, au moyen de deux chevilles qui passeront par les trous *A*, *B*, & par ceux du méridien... *CD* est une vis sans fin, assujettie dans les deux côtés *AD*, *BC*, en sorte qu'elle peut tourner sans avancer ni reculer. Chaque filet de cette vis doit avoir l'épaisseur précise d'un degré du méridien, & l'anse *E* doit avoir un trou *fileté*, & proportionné à la vis *CD*... La tête *C* de la vis *CD*, doit être faite en forme d'*index*, pour marquer les minutes sur un petit cadran, que je suppose tracé sur le côté du support *BC*; de cette façon, la vis *CD* faisant un tour entier, fera avancer ou reculer l'anse *E*, de la valeur d'un degré du méridien; & l'*index C* en marquera chaque minute sur le petit cadran dont je viens de parler.

L'autre moyen est une plaque de fer *FGHK*, *Fig.* 19;

de 8 ou 10 pouces de longueur, plus ou moins, à volonté, sur laquelle on marquera les minutes 2 à 2, ou 1 à 1, à proportion de la longueur qu'on donnera à la plaque. Il y aura en bas deux trous *F*, *G*, qui comprendront exactement deux degrés du méridien. Sur cette plaque, on prolongera les divisions des degrés, depuis *F* jusques en *H*; depuis *L* jusques en *I*, & depuis *G* jusques en *K*.... On tirera en suite deux lignes transversales, depuis *F* jusques en *I*, & depuis *L* jusques en *K*... Si l'on partage ces deux lignes en 30 parties égales, où l'on percera autant de trous, chacune vaudra deux minutes; & si on les partage en 60, chacune ne vaudra qu'une minute. L'instrument suspendu par le trou *I*, par exemple, sera dans la même situation que s'il étoit suspendu par le trou *L*, qui est le degré complet; & chaque trou entre-deux, produira une suspension proportionnée au nombre de minutes qui seront écrites à côté.

Usage de cet Instrument sur Terre.

Il faut commencer par les opérations faciles, & nous viendrons en suite aux plus difficiles. Je m'étendrai beaucoup sur cette premiere application de l'instrument, parce que la plûpart des choses serviront pour les explications suivantes.



PREMIER PROBLEME.

Connoissant la hauteur du pole & la déclinaison du Soleil, connoître l'heure qu'il est par Minutes & Secondes.

Supposons que nous sommes à l'élévation de 45 degrés, & au 6 Juin 1746 (deuxieme année après les Bissextes), auquel jour la déclinaison du Soleil est marquée de 22 *degrés* 40 *minutes*. Choisissons la 16e *Fig.* 1°. Je mets l'anse *K* au 45e degré du méridien, car l'instrument étant suspendu par cet endroit, le pole *E* sera élevé de 45 degrés au-dessus de l'horison. 2°. Je prends sur l'arc *GADH*, la coche du 22e degré, & j'y mets la cheville *O*, de la piece *OPQNR*. 3°. Prenant l'arc *QNR* avec la main, je le pousse à gauche, jusqu'à ce que l'extrémité *R* (qui est zéro) touche la vis *N*; & dans cet état, la piece *OPQNR* marquera 22 degrés précisément : & comme la déclinaison du 6 Juin est de 22 degrés 40 minutes, je retire à droite l'arc *QNR*, jusqu'à ce que la vis *N* se trouve vis-à-vis de 40 *minutes*; après quoi je serre la vis, pour que l'arc ne remue plus. Voilà l'instrument réglé pour marquer pendant tout le jour 6 Juin 1746. 4°. Que ce soit sur une terrasse, dans une basse-cour, ou à la campagne, il faut avoir un point d'appui pour suspendre l'instrument. 5°. L'instrument étant suspendu, il faut l'orienter d'une maniere approchante. Je dirai plus bas ce qu'il faudroit faire, si l'on ne sçavoit pas de quel côté est le midi approchant. 6°. Quittons la *Fig.* 16 pour prendre la 14. Je suppose que l'équateur *CBD* est à peu près bien pour ce qui regarde les 4 points cardinaux du monde, sans sçavoir toutefois si cette situation de l'instrument décline vers le Levant ou le Couchant. 7°. Comme on

ne peut pas connoître les petites parties de l'heure, sans connoître l'heure courante, il faut avoir recours au *guide*, dont j'ai différé l'explication jusqu'ici.

Explication du Guide.

Le Soleil parcourt de si grands espaces dans ce petit cadran, que pour peu que l'instrument sorte de sa véritable position, les rayons du Soleil n'entrent plus dans la chambre obscure. Il faudroit souvent tâtonner l'espace de plusieurs minutes, sans pouvoir rencontrer le point de les y introduire. C'est pour cette raison que j'y ai pratiqué un *guide* pour la prompte exécution... Ce *guide* est un petit trou &, *Fig.* 13, qui répond au *circuit ponctué Z*, *même Fig.* L'image du Soleil qui passe à-travers ce trou, est bien différente de celle qui passe par la lunette. Comme elle est beaucoup plus petite, elle est aussi beaucoup plus tranquille, & un écart de plusieurs degrés, n'est pas capable de la faire sortir du fond *CBPA*.

Usage du Guide.

L'Equateur *CDB*, *Fig.* 14, étant orienté, comme j'ai dit, d'une maniere approchante, il faut d'une main tenir l'arrêt *EF élevé*, & de l'autre faire tourner l'équateur, jusqu'à ce que l'image & rentre dans le circuit *Z*, *Fig.* 13; & dès-lors la grande image du Soleil paroîtra infailliblement dans la chambre obscure, & marquera la minute courante. Reste à sçavoir à quelle heure appartiendra cette minute, ce que nous connoîtrons par la coche où se trouvera le talon *E* de l'arrêt *EF*... Chaque heure ayant 12 coches, celle qui sépare une heure d'avec l'autre, est tout-à-la-fois la fin de l'heure précédente, & le

commencement de la ſuivante ; la deuxieme coche vaut 5 minutes, la troiſieme 10, & la quatrieme 15, qui ſont marquées, & ainſi de ſuite.

Une fois que vous ſçaurez *captiver* la grande image du Soleil dans la chambre obſcure, par le moyen du guide *&c*, il ne vous ſera pas difficile d'orienter cet inſtrument de la maniere la plus juſte ; car pour peu que les poles de l'équateur ne ſoient pas dans la véritable méridienne, cette image ſortira des bornes *CB*, *PA*, ce qui vous donnera occaſion de tourner davantage l'inſtrument, juſqu'à ce que l'image *S*, *Fig.* 13, marche exactement entre les deux bornes *CB*, *PA*, ſans en ſortir.

PREMIERE REFLEXION.

Tout ce que je viens de dire juſqu'ici, deviendroit inutile pour un inſtrument domeſtique, orienté d'une maniere fixe. Il faudroit ſeulement ajuſter la déclinaiſon du jour, & changer les coches dans le tems de l'obſervation, ce qui eſt tout ſimple : mais comme cet *inſtrument* eſt auſſi deſtiné pour changer ſouvent de latitude & de ſituation en toute façon, il a fallu entrer dans un plus grand détail.

II. REFLEXION.

Ce Cadran eſt infiniment avantageux ſur terre, pour trouver une méridienne ſûre & à toute heure du jour ; car comme le Soleil parcourt 12 $\frac{1}{2}$ pouces par chaques 5 minutes, ſi l'on fait ſeulement trois opérations de ſuite (ce qui ne comprend qu'un quart-d'heure), l'image du Soleil aura parcouru 37 $\frac{1}{2}$ pouces, & pour peu que l'inſtrument ſoit déplacé, cette image aura franchi pluſieurs fois les bornes qui lui ſont preſcrites, ce qui aura porté l'Obſer-

vateur

vateur à le détourner, pour le ranger dans la place convenable.

II. PROBLEME.

Connoissant la déclinaison du Soleil, trouver la latitude d'un lieu donné, par degrés & minutes.

Comme la déclinaison est la même pour toutes les parties du globe terrestre, si nous voulons (le 6 Juin 1746) sçavoir au juste la latitude du pays où nous sommes, il faut ajuster la déclinaison comme il a été dit Probleme I, Articles 2° & 3° ci-dessus ; après quoi l'instrument étant suspendu par *quelques degrés plus ou moins que la juste élévation du pole*, il faut le tourner horisontalement, jusqu'à ce que le *guide* se montre dans la chambre obscure : que si le *guide* ne s'y montroit pas, on verroit aisément si l'élévation peche par *trop*, ou par *moins*, ou bien si l'équateur n'est pas assez tourné pour l'élévation actuelle du Soleil ; dans l'un ou l'autre de ces deux cas, ou il faudroit suspendre l'instrument par un degré *moyen*, ou bien changer quelque chose de l'équateur en avant ou en arriere... Quand le guide se montrera dans la chambre obscure, on changera la suspension, ou les coches de l'équateur, jusqu'à ce que le même guide tombe dans le *circuit Z*, *Fig.* 13... Enfin, quand le guide tombera dans le circuit *Z*, on observera la marche de la grande image du Soleil ; & si quand elle arrivera au milieu de l'espace *AP*, *Fig.* 13, (également éloignée des deux extrémités *A* & *P*) elle remplit exactement les deux bornes *CB*, *PA*, c'est une marque que l'instrument est bien suspendu, & tout est fait. Si au contraire cette image franchit ses bornes d'un côté ou d'autre, on changera la suspension par le moyen de la *Fig.* 19, & quand on sera parvenu à rendre l'image

complette au milieu de ses deux bornes, on sera sûr d'avoir trouvé la véritable latitude de l'endroit. On prendra le nombre des degrés sur le méridien, & les minutes sur l'angle *HIKFLG*, Fig. 19.

REMARQUE.

Cette maniere de trouver la latitude est d'autant plus agréable, qu'on peut le faire à toute heure du jour : du moins n'est-on pas obligé d'attendre midi precis, où le ciel peut n'être pas pur : d'ailleurs, comme cet instrument produit l'effet d'*un cercle de* 100 *pieds de diametre* : on sent bien que les quarts-de-cercles des Astronomes, n'ont pas, à beaucoup près, cette étendue, ni par conséquent cette précision.

Dans ces sortes d'instrumens, en multipliant les divisions, on les rend extrèmement petites, & c'est de l'attention infinie de l'Observateur, que dépend la justesse de l'opération : mais dans celui-ci, les divisions sont grandes, quoique multipliées, & c'est le Soleil par sa marche précipitée, qui en fait tous les frais.

III. REFLEXION.

Cet instrument demande, à la vérité, beaucoup de justesse dans l'exécution, soit pour l'égalité des divisions, soit pour celle du calibre des pieces, afin qu'elles ne pesent pas plus d'un côté que de l'autre, & que le centre de *gravité* soit toûjours au centre de l'instrument, quelque situation qu'on puisse lui donner : mais aussi, cela supposé, il sera d'une grande commodité pour quantité d'opérations.

Je sens bien que cet instrument doit être exécuté en

laiton, mais quant au modele que j'en ai fait, il ne peut être que de fer, faute d'avoir le métal convenable, & un ouvrier capable de l'exécuter : il seroit même à souhaiter qu'il n'y eût pas d'autres choses à redire ; mais quelque imparfait qu'il puisse être, il servira à éclaircir mon Mémoire, & c'est tout ce que je demande.

III. PROBLEME.

Connoissant la Latitude d'un lieu donné, trouver la déclinaison du Soleil, qu'on ignore, pour un jour déterminé.

Cette opération ne differe presque en rien de la précédente ; car ayant suspendu l'instrument suivant la latitude ; il faut le faire tourner horisontalement, pour l'orienter d'une maniere approchante : il faut ensuite faire tourner l'équateur, pour chercher l'heure approchante, au moyen du *guide*, & enfin incliner la chambre obscure, jusqu'à ce que l'image du Soleil remplisse exactement ses deux bornes, étant à une égale distance des deux extrémités *A* & *P*. On connoîtra alors la déclinaison du Soleil, sçavoir les degrés sur l'arc *GADH*, & les minutes sur l'arc *QNR*, *Fig*. 16.

IV. REFLEXION.

Cette méthode peut servir sur terre pour corriger les fautes d'impression, qui peuvent quelquefois s'être glissées dans les Tables de déclinaison, ou pour en dresser une soi-même si l'on veut.

IV. PROBLEME.

Connoissant la déclinaison du Soleil, connoître la Latitude de l'endroit où l'on est, par les ascensions droites du Soleil jusqu'à midi.

Il faut 1°, arrêter la chambre obscure parallelement à l'équateur, dans la même situation où elle doit être le jour des équinoxes. 2°. Il faut suspendre l'instrument par le point du méridien où il est coupé par l'équateur, en sorte que cet équateur d'*incliné* qu'il étoit, devienne *vertical*. 3°. Il faut faire tourner l'instrument horisontalement, jusqu'à ce que le plan de l'équateur soit parallele aux rayons du Soleil. 4°. Il faut changer les coches, jusqu'à ce que le guide donne dans le circuit *Z*, *Fig.* 13. Alors la grande image y paroîtra aussi, & baissera bien-tôt, si c'est avant midi, ou haussera si c'est après. Mais comme elle travaillera incessamment à franchir ses bornes; il faudra l'y *captiver*, en tournant l'instrument horisontalement du *Levant au Couchant*, à mesure que le Soleil tournera aussi, en sorte que le plan de l'équateur soit toûjours parallele aux rayons du Soleil. 5°. Quand à force de baisser, l'image sera parvenue au point *PC*, *Fig.* 13, il faudra changer une coche, & le Soleil remontera au point *A*. 6°. Quand l'image ne descendra plus, il sera midi, & le cercle de l'équateur tiendra alors la véritable place du méridien, tandis que le plan du méridien sera parallele au Levant & au couchant. Je dis ceci pour faire comprendre le changement de cet instrument, étant suspendu par l'intersection du méridien & de l'équateur.

Lorsque le Soleil ne montera plus, on remarquera exactement le lieu de l'image dans la chambre obscure;

on regardera aussi la coche où se trouvera l'arrêt *E*, *Fig*. 14, & on notera le tout.

REDUCTION.

En comptant un degré 15 minutes pour chaque *coche* de l'équateur, on aura le véritable nombre des degrés; chaque minute de la chambre obscure vaudra 15 minutes de degré, & chaques 5 secondes vaudront une minute 15 secondes de degré... On fera la somme du tout, laquelle somme par l'*addition* de la déclinaison *méridionale* du Soleil, ou par la *soustraction* de la déclinaison *Septentrionale*, donnera la latitude exacte du lieu de l'observation.

II. COROLLAIRE.

Cette méthode est excellente pour avoir avec exactitude les hauteurs correspondantes du Soleil sur l'horison, à chaque moment du jour.

III. COROLLAIRE.

On peut aussi, par les élévations du Soleil sur l'horison, connoître l'heure qu'il est, quand on connoît la latitude.

V. PROBLEME.

Sans connoître ni la Latitude, ni la déclinaison du Soleil; connoître dans le moment si c'est avant ou après midi.

Ce Probleme n'est que l'application du précédent; car l'instrument étant *rangé & suspendu* comme dans le qua-

trieme Probleme, on n'aura pas plutôt présenté la lunette vers le Soleil, que son image *haussera ou baissera* notablement dans la chambre obscure, & fera connoître sur le champ, si c'est avant ou après midi.

Usage de cet Instrument sur Mer.

Il est certain que les agitations du vaisseau, surtout par un grand vent, feront évanouïr une partie de la précision qu'on peut tirer de cet instrument sur terre : mais il en restera toûjours beaucoup plus qu'on n'en a eu jusqu'ici. Le vent n'est pas toûjours violent, il est souvent médiocre, & quelquefois trop foible. Ainsi il y aura bien des occasions où cet instrument pourra faire plaisir, comme dans certaines isles, où l'on relâche de gré ou de force, &c. Examinons la chose de plus près.

Cet Instrument demande deux conditions essentielles, pour marquer avec exactitude. La premiere est l'*à-plomb*, qu'il prend par sa propre pesanteur, quand rien ne l'en détourne; & la seconde est sa *direction* par rapport à *l'axe du* monde, direction qu'on lui donne facilement, en *captivant* l'image du Soleil entre les deux bornes si souvent citées.

De l'A-plomb.

Pour ce qui regarde l'*à-plomb*, l'agitation ordinaire du vaisseau ne l'en écartera pas beaucoup; mais les agitations plus violentes, & l'impression du vent sur l'instrument même, le tiendront dans un balancement continuel, qui ne permettra d'observer que d'une maniere imparfaite. Voilà l'objection dans toute sa force; voyons si l'on y peut répondre.

Premierement, le vent ne souffle que par boutade, &

il y a de tems en tems quelque relâche, pendant lequel l'inſtrument étant à-plomb, pourra donner lieu à un moment d'obſervation, d'autant plus utile qu'il ſera plus déciſif.

En ſecond lieu, quand même ces interſtices de vent ne ſuffiroient pas pour que l'inſtrument reprît ſon *à-plomb*, il eſt aiſé de le lui faire prendre. *Une perſonne attentive, qui employera ſes deux mains à propos pour arrêter les balancemens du cadran, & lui redonner ſon à-plomb, y réuſſira toutes les fois qu'elle voudra.* Nouvelles ſecouſſes du vent, nouveau ſecours de l'homme, juſqu'à ce qu'on ait vû ce qu'on vouloit voir. L'*à-plomb* eſt la ſituation la plus naturelle du corps peſant ſuſpendu librement ; elle eſt auſſi la plus invariable & la plus réguliere, puiſqu'elle ſert de regle à preſque toutes les autres.

D'ailleurs, ſi les balancemens ſe faiſoient du Sud au Nord (ce qui peut arriver bien ſouvent), l'*à-plomb* n'eſt pas abſolument néceſſaire pour l'obſervation ; parce que l'image du Soleil ſe fera voir en paſſant dans la chambre obſcure à chaque *allée* & *venue* ; & comme l'eſpace qu'elle parcourt eſt d'un pied de long, en 5 minutes, on verra bien à peu près d'un pouce à l'autre, ou de deux en deux pouces, les progrès qu'elle fera.

Il n'en eſt pas de même des inſtrumens ordinaires. Suppoſons, par exemple, un anneau aſtronomique, ou un aſtrolabe de même calibre que ce cadran, de 30 pouces de diametre ; le rayon du Soleil ne fera que 3 lignes par degré, c'eſt-à-dire, en 4 *minutes d'heure*, & pour peu que l'inſtrument balance, on perdra tout le fruit de l'obſervation ; mais dans celui-ci, le rayon du Soleil fera 120 lignes par degré, ou en 4 *minutes d'heure*, & les balancemens n'empêcheront pas d'entrevoir une différence ſenſible d'un eſpace à l'autre.

De la Direction.

Quoique je ne connoiſſe la mer que pour l'avoir vûe du rivage, je ſuis bien perſuadé que les balancemens du vaiſſeau ne l'empêchent pas de ſuivre une ligne aſſez droite (excepté pendant la tempête), ſans quoi on ne pourroit pas naviger. Cela étant, une fois qu'on aura rangé l'inſtrument dans ſa véritable direction, il y reſtera ſans aucun écart; parce que l'anſe eſt faite de façon, que l'inſtrument, avec toute ſorte de liberté, n'a pas celle de tourner *horiſontalement* de lui-même; il faut que quelqu'un le tourne, & par conſéquent il reſtera dans la ſituation reſpective du vaiſſeau, ſans qu'il ſoit beſoin de le diriger à chaque obſervation. L'unique attention de l'Obſervateur ſera donc de changer les coches de l'équateur, & de redonner l'*à-plomb* en touchant l'inſtrument par le bas, pour rompre ſes balancemens.

II. REMARQUE.

Il ſeroit inutile de m'étendre davantage ſur les inconvéniens de la mer, & ſur les remedes qu'on peut y apporter. Je voudrois être à même de pouvoir en faire l'épreuve, je n'épargnerois rien pour cela, & peut-être que je trouverois des expédiens ſuffiſans. Après tout, ſi cette machine paroît à mes Juges pouvoir mériter quelque attention, l'expérience & le tems acheveront le reſte. Quant à moi, j'ai ſouvent expoſé au vent le modele que j'avois fait en bois, & dans le plus fort de l'agitation, je l'arrêtois tout-à-coup, & je retrouvois la minute ſans erreur, ce que je connoiſſois par une bonne montre à ſecondes, que je mettois d'accord avec l'inſtrument, avant que de l'expoſer au vent.

III.

III. REMARQUE.

Cet Instrument peut servir pour connoître la déclinaison de l'aiman, dans les différentes régions où un vaisseau peut se trouver. Car tant que l'image du Soleil se tiendra exactement dans ses deux bornes, & surtout pendant plusieurs opérations, on ne peut pas douter que le méridien ne soit parallele à l'axe du monde.... Disons mieux; cet instrument tiendroit lieu de Boussole pendant le jour, dans un cas de nécessité; car étant une fois placé relativement au vaisseau, il est impossible que le vaisseau change tant soit peu dc direction, qu'aussi-tôt l'image du Soleil ne sorte de ses bornes; & tant qu'il y restera, c'est une preuve que le vaisseau se soûtient dans sa direction.

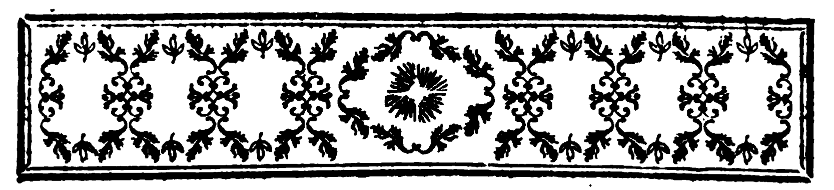
DERNIERE REMARQUE.

Comme je ne sçaurois prévoir tous les inconvéniens qui peuvent diminuer les avantages de ce cadran, je ne sçaurois aussi prévoir tous les différens usages qu'on en peut tirer, ainsi que les corrections qu'on y peut faire. Cette idée m'a paru singuliere ; les effets en sont surprenans sur terre : c'est aux connoisseurs à décider de ses avantages & de ses défauts.

Il est bien tems de finir un Mémoire qui n'est déja que trop long, & qui peut-être, n'en sera pas plus intelligible. Permettez que ce soit en faisant remarquer que ces deux pieces semblent se donner mutuellement la *main*, pour perpétuer la connoissance de l'heure en mer. Si l'une & l'autre pouvoient être un jour exécutées avec toute la justesse dont elles sont susceptibles, elles serviroient peut-être à la connoissance d'une chose non moins importante

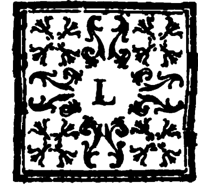
que l'heure ; je parle des longitudes sur mer, qu'on ne connoîtra jamais qu'au moyen d'une *horloge* parfaitement juste, & d'un *cadran solaire* excellent, pour pouvoir comparer l'heure du méridien de *départ* (marquée sans cesse par cette horloge), avec l'heure de tout autre méridien (marquée par le cadran solaire dans le tems de l'observation)... Les découvertes les plus utiles sont presque toûjours si peu de chose dans leur naissance, qu'on me pardonnera l'espece de conjecture que je viens de hasarder en faveur de ces deux-là. Je reconnois très-sincerement que ce ne peut être qu'à force de correction : mais je serois toûjours trop flatté, si j'avois fait un premier pas dans cette carriere, laissant la gloire à quelque autre de la fournir jusqu'à la fin.





ADDITIONS AU MEMOIRE QUI A POUR SENTENCE:

Semper id melius est, quod optimo propinquius est.



LA précipitation avec laquelle je fus obligé de dresser ce Mémoire, m'ayant fait oublier certaines choses qui méritoient d'y avoir place, j'ai cru devoir les mettre dans ce Supplément.

Méthode pour régler le Sablier.

Le petit bruit que fait à chaque minute la croix d'acier, en frappant sur la jambe *ED*, *Fig.* 9, est d'un secours admirable pour régler ce sablier. Je me sers d'un pendule libre à secondes; je le lâche au moment que la minute frappe, & je compte jusques à 240 vibrations, faisant 4 minutes, ou un tour complet de la croix des creusets. Car, comme j'ai dit, il y a une ou deux secondes de différence d'un creuset à l'autre, mais les tours entiers sont égaux entre eux.

Si la quatrieme minute frappe plutôt que la 240me vibration, je remarque de combien, & mettant la clef dans le trou du cadran, je tourne de gauche à droite deux ou trois tours au hasard, & je recommence mon expérience de 240 vibrations. Il est certain que le tour des creusets s'achevera quelques secondes plus tard, & continuant de tourner la clef de gauche à droite, j'attrappe en moins de demi-heure une justesse approchante : la même chose pour reculer, mais il faut tourner de droite à gauche.... Je l'observe ensuite pendant quelques heures sur ma pendule, & enfin je le mets sur un cadran solaire, pour voir l'effet de 24 en 24 heures.

Ce même pendule libre me sert de preuve de tems en tems, pour connoître si rien n'embarrasse le trou; car pour peu qu'il y eût d'obstacle, les 4 minutes tiendroient beaucoup plus de 240 vibrations. On pourra s'en servir dans les rades ou autres occasions de repos : on pourroit même avoir un sablier ordinaire de 4 minutes (coulant bien gros pour être plus sûr), & s'en servir en route, pour vérifier la marche du sablier : car comme j'ai dit, le bruit des minutes rend ce sablier beaucoup plus facile à régler que les pendules ordinaires.

Il me semble qu'une cloche de verre fermée par le bas, ou une boîte factice de même matiere, étant suspendue avec la suspension marine, & placée dans l'endroit du vaisseau le plus tranquille, c'est-à-dire, au centre du mouvement; il me semble, dis-je, qu'une pareille boîte transparente, pourroit contenir un pendule libre qui conserveroit quelque tems ses vibrations, malgré le mouvement du vaisseau, attendu que cette agitation ne changeroit rien à l'air renfermé dans la boîte. C'est une idée que je ne suis pas à portée de vérifier, & que je ne donne que par conjecture.

Observation.

J'ai bien du regret de n'avoir pas donné à mon sablier autant de *profondeur* que de *largeur*; car n'occupanr presque que la même place, il auroit contenu la moitié plus de sable, & j'aurois pu le faire couler beaucoup plus gros, puisque plus il coule gros, & plus j'y trouve de justesse.

Bien plus, cela m'auroit fourni le moyen d'avoir deux sabliers dans un seul, avec un peu plus de dépense, & l'un auroit servi de preuve à l'autre. Voici mon idée.

Le gros de la dépense consiste surtout dans les fers & la caisse de bois, & si mon sablier avoit autant de profondeur que de largeur, j'aurois pû mettre un second cadran au côté *H* de la *Fig.* 2, & partageant en deux l'espace *FE* de la *Fig.* 6 (qui auroit été plus grand de moitié), j'y aurois placé une seconde croix de creusets, qui auroit marqué sur le second cadran dont je parle; & le même entonnoir ayant deux *couloirs*, auroit fourni à tous les deux à la fois.

Il me paroît que cela auroit été très-avantageux sur mer (où l'on peut charger une personne de veiller au sablier) car un sablier tel que le mien, étant une fois bien réglé, ne doit jamais *avancer*, mais il peut *reculer*, quand quelque poil ou autre chose embarrasse le trou. Or les deux cadrans du même sablier étant également bien réglés, le premier qui retarderoit sur l'autre, seroit celui qui feroit faute: on l'ouvriroit pour dégager le trou, & on le remettroit ensuite à la minute, par le moyen de l'autre, qui n'auroit point interrompu sa marche.

De la Suspension.

La suspension de ce sablier paroît suffisante telle qu'elle est, car je le fais balancer par des vibrations de deux pieds (la suspension jusqu'au plancher étant allongée de trois pieds), sans que le pendule libre me fasse voir aucune différence entre cet état d'agitation & l'état de repos. Cependant, quand MM. les Commissaires auront vû le modele, ils jugeront s'il conviendroit d'ajoûter à cette suspension, la suspension marine des boussoles.

De l'Humidité.

Quoique la caisse de mon sablier soit faite de plusieurs pieces de rapport unies les unes aux autres, j'ose cependant avancer que l'humidité n'y pénétrera pas avec plus de facilité que dans les sabliers ordinaires; car outre que les planches de la caisse ont 7 à 8 lignes d'épaisseur, elles sont peintes ~~en huile de plusieurs~~ couches, que *l'eau* même ne pénetreroit pas aisément; & d'ailleurs, en cas de besoin, on pourroit le revêtir d'une seconde boîte ou *surtout*, qu'on n'ouvriroit que pour tourner le sablier, ce qui le mettroit au-dessus de toute atteinte.

De la qualité du Sable.

Le sable que j'ai employé dans mon sablier, n'est pas tel qu'il devroit être; il n'est pas assez grainé, & entraîne beaucoup de poussiere avec lui. Je l'ai trouvé dans une forêt à une lieue de chez moi, & je suis forcé de m'en servir faute d'autre. Le sable d'Allemagne est infiniment plus propre pour cela, mais il coûte ici 20 sols la livre.

J'ignore si l'on pourroit trouver quelque autre matiere plus dure & aussi fluide que le sable : elle seroit préférable, à cause qu'elle seroit moins sujette à se réduire en poussiere. Cependant le sable d'Allemagne durera longtems, sans avoir besoin d'être changé.

EXPERIENCE.

J'avois mêlé parmi mon sable une certaine quantité de *poudre d'œufs*, pour le rendre plus agréable à la vûe, & quoique plus legere, je comptois que le mélange la rendroit, pour ainsi dire, *homogene* avec le sable. Cependant je m'apperçûs que mon sablier (deux ou trois heures après avoir été tourné) avançoit sensiblement, & reculoit sur la fin. Je jugeai qu'il en étoit d'un sable plus pesant à l'égard d'un plus leger, comme des personnes plus robustes aux personnes plus foibles au sortir d'une presse; c'est-à-dire, que le sable plus pesant gagnoit le bas avec plus de force, & obligeoit le plus leger à rester à côté, pour ne couler que sur la fin. Je retirai ce sable mêlé, j'y en mis d'autre tiré tout d'un même endroit, & le défaut a disparu : d'où j'infere qu'il faut employer du sable homogene.

II. EXPERIENCE.

J'ai éprouvé que non-seulement un trou conique fait couler le sable plus uniment, mais encore qu'il en coule beaucoup plus. Car ayant fait un couloir dont le trou étoit plat & mince comme du papier, j'enfonçai une broche dans ce trou plat, & dans un trou conique de 3 lignes d'épaisseur : la broche entroit un peu plus dans le trou plat que dans le trou conique, ce qui prouve que le premier étoit plus grand que le second, & cependant le trou

conique qui étoit un peu plus petit, délivroit la moitié plus de sable.... J'attribue cette différence aux petites colomnes de sable qui pressent pour la sortie. Le trou plat n'en a qu'une seule, & le trou conique en a plusieurs, qui, enfilant la base du cone, pressent de tous côtés pour arriver à la pointe.

Sur le Cadran.

En relisant l'article de mon Mémoire, qui a pour titre *l'intérieur de la Chambre obscure*, j'ai remarqué que dans la *Fig.* 12 le rayon du Soleil ne paroît pas faire *l'angle de réflexion* égal à celui d'*incidence*. Si je ne me suis pas étendu davantage là-dessus, c'est parce qu'on verra dans le modele, que la position respective des miroirs, corrige ce qui paroît n'être pas en regle: mais comme on pourroit examiner le Mémoire avant l'arrivée du modele, j'ai cru devoir expliquer cet endroit.

Méthode pour placer la Lunette.

Au moyen des expériences que j'ai faites, j'ai trouvé qu'avec la lunette dont je me sers, il me faut 58 pouces de distance, depuis l'oculaire *R* jusques au point *Z*, *Fig.* 13, pour que l'image du Soleil ait cinq pouces, & qu'elle fasse 2 $\frac{1}{2}$ pouces par minute. C'est pour cela que je fais sortir l'objectif *Q* d'environ 4 pouces hors de la chambre, pour qu'il reste 14 pouces depuis *R* jusques au premier miroir *T*... Depuis celui-là jusques à *VY*, il y en a 22, & 22 depuis *Y* jusques à *Z*; ce sont justement les 58 pouces dont j'ai besoin.

1°. J'ai fait une ouverture ronde au fond d'en-haut, pour recevoir la lunette, laquelle ouverture est également éloignée des deux côtés de la *chambre*.

2°.

12°. Pour diriger l'oculaire *R* de façon que le rayon *RT* arrive naturellement sur la ligne *TZ*, laquelle partage le fond d'en-bas en deux parties égales, j'arrête le bout de la lunette *R* autant au milieu que je le puis, au moyen de deux vis, en mesurant avec le compas.

3°. Ayant garni de papier l'espace *NCB*, j'expose l'objectif au Soleil, & je dirige la chambre de façon que le guide *&* donne précisément sur *Z*; & pour lors je vois si l'image du Soleil est partagée bien également, par la ligne *TZ*; & si je trouve de la différence, je pousse insensiblement l'oculaire *R* jusqu'à ce que la ligne *TZ* partage bien par le milieu cette image du Soleil, & je fixe la lunette en serrant les deux vis qui la tiennent. Vous trouverez ci-après une autre preuve du *bien-être* de la lunette.

L'horison de la Lunette.

La lunette étant fixée de la façon que je viens de dire, je change *un peu* la situation de la chambre, l'inclinant indifféremment de droite à gauche & en tout sens, pour que l'image du Soleil change de place. Cette image, en changeant de place, rencontre un cercle *invisible*, lequel ne devient *visible*, que par la rencontre de l'image du Soleil... Ce cercle (dont on ne voit jamais qu'une portion à la fois) est d'une très-belle couleur bleu-céleste. On peut le rendre visible successivement dans toutes ses parties, en dirigeant l'image du Soleil tout-autour.

La principale propriété de ce cercle, est de *terminer* précisément l'espace que le Soleil peut éclairer sans changer la *situation* de la chambre : de sorte que l'image du Soleil arrivant sur ce cercle, qu'elle éclaire, elle commence à être tronquée, & cesse entierement de paroître dès qu'elle a franchi ce cercle, comme elle ne commence de

paroître qu'à mesure qu'elle entre dans l'intérieur de ce cercle. C'est ce qui m'a porté à l'appeller l'*horison*, puisqu'il marque, pour ainsi dire, le lever & le coucher du Soleil... Cet horison est toûjours proportionnel à l'image du Soleil; leurs diametres sont environ comme 46 à 14.

Une autre propriété de cet *horison*, est d'indiquer la juste position de la lunette; car si à mesure que le Soleil le rend visible, vous avez attention d'y marquer des points, & que vous le suiviez tout-autour, vous aurez un cercle *ponctué* & parfait, lequel doit être également éloigné des deux côtés de la chambre, ou bien la lunette *est mal posée*.

Poser le premier miroir.

Puisque le Soleil ne luit qu'autant qu'il est renfermé dans le cercle de l'*horison*, ce cercle désigne tout-à-la-fois & la grandeur que doit avoir le miroir, & la place où il doit être arrêté.

Ce miroir (quarré-long) est mastiqué sur une plaque de fer, laquelle est montée sur 4 pieds, imitant la figure d'une petite table. Les quatre pieds de cette table qui sont faits en vis, ont chacun *deux écroues*, dont une reste en-dedans de la chambre, & l'autre en-dehors; & la *tole* qui forme le fond de la chambre, se trouve entre les deux écroues, ou pour mieux dire, entre les 8 écroues, 4 dedans, 4 dehors. Ces deux écroues à chaque vis, sont pour pouvoir fixer chaque pied dans l'élévation convenable; elles serrent l'une contre l'autre (la tole entre deux).

C'est par le moyen de ces pieds, qu'on donne au petit miroir la situation nécessaire pour renvoyer en haut l'image du Soleil. Pour cela on couvre d'un papier le fond d'en-haut: l'image réfléchie va s'y peindre... Alors il faut de nouveau agiter la chambre, pour que cette *nouvelle*

image découvre encore ſon *horiſon* en-haut, comme nous avons dit pour le bas. Il faut ponctuer cet *horiſon*, & ſi étant achevé, il ſe trouve également éloigné des deux côtés de la chambre, c'eſt une marque que le premier miroir eſt dans ſa *juſte poſition* : ſinon il faut lever ou baiſſer les pieds du petit miroir, juſqu'à ce que l'*horiſon* d'en-haut ſoit à une égale diſtance des deux côtés de la chambre.

Poſer le ſecond Miroir.

Le ſecond miroir ne differe du premier que par ſa grandeur. Même nombre de pieds, même nombre d'écroues, & même façon de le placer, c'eſt-à-dire ſur l'*horiſon* qu'on aura ponctué. Il faut tracer en-bas les deux bornes *CB*, *PA*, qui formeront le chemin où doit paſſer l'image du Soleil... Comme on ne peut pas trouver un troiſieme horiſon en-bas, parce que cet horiſon étant fort grand, ſe trouve hors de la chambre obſcure, il faut avoir une planche bien dégauchie, qu'on mettra ſur une ligne méridienne *à angles* droits. On inclinera cette planche vers le midi, de façon que ſon plan réponde au *parallele* que décrit le Soleil ce jour-là dans le ciel.

Enfin aux approches de midi, on appliquera la chambre contre cette planche, & l'inclinant peu à peu vers le levant ou vers le couchant, juſqu'à ce que le guide *&* donne ſur *Z*, on examinera ſi l'image du Soleil occupe précisément l'eſpace qui lui eſt deſtiné entre les deux bornes *CB*, *PA* ; & ſuppoſé qu'il l'occupe, on examinera ſi en avançant par le *propre mouvement* du Soleil, cette image ne ſortira pas de ſes bornes... Si elle ſe maintient entre ces deux bornes depuis *A* juſques en *P* (la chambre étant toûjours appliquée contre la planche en queſtion), c'eſt une marque que le ſecond miroir eſt bien placé, ainſi que

tout le reste. Mais si au contraire on voit que l'image du Soleil ne marche pas entre ces deux bornes, on touchera aux pieds du grand miroir du côté qu'on jugera convenable, jusques à ce que l'image du Soleil se maintienne dans ses bornes *CB*, *PA*, *Fig.* 13.

Alors vous serez assûré que la lunette, le premier & le second miroir sont bien disposés, & que la chambre toute entiere est dans sa perfection, & en état d'être mise dans son équateur.

De la matiere des Miroirs.

Je pense qu'il y auroit quelque avantage à se servir de miroirs de métal, soit parce que l'étain des glaces peut s'ôter avec le tems, soit parce qu'elles sont fort fragiles; soit enfin parce qu'au milieu du grand miroir *VY*, on pourroit percer le trou du guide &, ce qui donneroit le moyen de diminuer la profondeur de la chambre d'environ deux pouces: mais je ne puis pas employer des miroirs de metal, ni même en faire la différence, n'ayant ni matiere ni ouvrier pour cela.

Ces miroirs de metal seroient absolument nécessaires; si les angles que font les rayons dans la *chambre obscure*, étoient plus ouverts qu'ils ne sont, parce qu'alors une glace étamée (sur-tout si elle est bien épaisse) pourroit produire deux images à la fois, une sur l'étain, & l'autre sur la glace: mais ici les angles sont si aigus, que cet inconvénient n'est point à craindre.

De la Suspension.

Quoique les deux suspensions que j'ai proposées dans mon Mémoire, soient l'une & l'autre bien pratiquables,

j'ai cru devoir en employer une troisieme, qui me paroît plus avantageuse à plusieurs égards... J'ai fait sur les deux circonférences (en-dedans) de mes deux méridiens *accolés*, des entailles d'un degré à l'autre. J'y mets une anse pliante en tout sens, laquelle peut couler tout-au-tour du méridien (les poles exceptés), & suspend la machine par tel degré que l'on veut. Voilà pour ce qui regarde les degrés.

Quant aux minutes, elles sont marquées au bas de l'instrument, au moyen d'un poids de 12 à 15 livres, qu'on peut augmenter à discrétion. Ce poids, qui est renfermé dans une espece de cage quarrée, que je ne sçaurois bien figurer sur le papier, s'accroche par une anse au degré correspondant d'en-bas. Par exemple, si la suspension est en-haut au 50e degré, le poids sera mis en-bas, pareillement au 50e degré.

L'anse du poids est traversée par une forte vis *horisontale*, dont la longueur est parallele au plan du méridien. En tournant cette vis, on fait avancer ou reculer le poids de tant & si peu que l'on veut, ce qui chasse insensiblement toute la machine vers le Midi ou vers le Nord, d'autant de minutes qu'on souhaite. Car ce poids, en avançant ainsi, fait mouvoir un *micrometre*, qui marque les minutes sur l'extérieur de la cage.



Raisons de préférer cette derniere Suspension.

La premiere suspension, *Fig.* 18, présente deux grandes difficultés. 1°. Il n'est pas aisé, il paroît même très-difficile, de pouvoir faire des *pas* de vis qui soient exactement de la largeur d'un degré. 2°. Cette vis qui soûtiendroit tout le poids de la machine, ne tourneroit qu'avec peine, & s'useroit bien vîte.

La seconde suspension, *Fig.* 19, demande une plaque assez longue, pour qu'il y ait un certain espace d'un trou à l'autre, ce qui allonge la machine; & d'ailleurs il y auroit bien de l'embarras, pour changer la cheville d'un trou à l'autre, parce que pendant ce changement, il faudroit soûtenir toute la machine par quelque autre moyen.

La troisieme suspension que je propose, est infiniment plus commode. 1°. Parce que l'anse de suspension peut couler d'un pole à l'autre sans démancher. 2°. Le poids qui est en-bas contribue à faire garder l'à-plomb à toute la machine. 3°. La vis qui tourne ne soûtient que le *poids*, & ne souffre pas beaucoup. 4°. Il n'y a point de sujettion pour les *pas* de la vis, parce que les minutes sont marquées d'après les *pas*. 5°. Et c'est ici le principal avantage, ce poids au bas de la machine est capable de *compenser* les inégalités qui pourront se trouver dans l'équilibre de chaque piece en particulier, & plus il sera pesant, & plus ces inégalités deviendront insensibles.

La suspension est faite actuellement, mais le poids ne l'est pas encore, ni ce qui le concerne. Je rendrai compte dans une critique qui accompagnera les modeles, je rendrai compte, dis-je, de la méthode que j'aurai suivie pour tracer les minutes avec justesse.

J'oubliois d'avertir que le poids, quoique mobile, quand il faut le changer de degré, n'a pas pour cela la liberté de balancer en *particulier*; il est fixe à cet égard, & ne fait, pour ainsi dire, qu'une même piece avec le méridien. Cette précaution me paroît nécessaire pour la mer, afin que le tout soit plutôt arrêté, à mesure qu'on touchera le poids avec la main pour rompre les balancemens de la machine.

Méthode pour vérifier l'Équateur.

Pour ce qui regarde la construction & l'emplacement de l'équateur, il suffit d'observer, 1°. Si le plan de cet équateur passe également & en même tems par les deux points de 90 degrés du méridien. 2°. Si toutes les parties de sa circonférence passent à une égale distance de ces mêmes points de 90 degrés... Celui que j'ai fait construire peche un peu dans ces deux cas: mais quand j'en ferois construire trente, ils auroient toûjours quelque défaut, parce que mon serrurier n'en sçait pas davantage; & quand il veut corriger un défaut, il en met ordinairement trois ou quatre opposés.

Quant à la division de ce même équateur, qui doit être en 288 parties, elle n'est pas si difficile, quoiqu'elle le soit toûjours beaucoup pour gens qui n'ont ni l'habitude, ni les instrumens nécessaires: mais il est à craindre que les défauts de construction n'influent un peu dans les divisions, quoiqu'elles soient justes d'ailleurs.

Pour connoître si ces divisions sont bien égales, on aura un *pendule libre*, ou une pendule à *secondes*; & après avoir orienté l'instrument avec soin, on observera le moment précis que le limbe antérieur du Soleil arrivera à la fin de

la *cinquieme minute*. Il faut pour cela deux personnes, l'une pour compter les secondes *tout haut*, & l'autre pour observer.

On changera ensuite une coche sans se presser, & si le limbe antérieur du Soleil arrive à la fin de la cinquieme minute en 300 secondes précisément, c'est signe que la division est juste : on pourra suivre les autres coches de la même façon. Je suppose qu'on est bien assûré de la justesse du pendule libre, & que rien d'étranger ne la dérange. Une bonne pendule seroit plus commode.

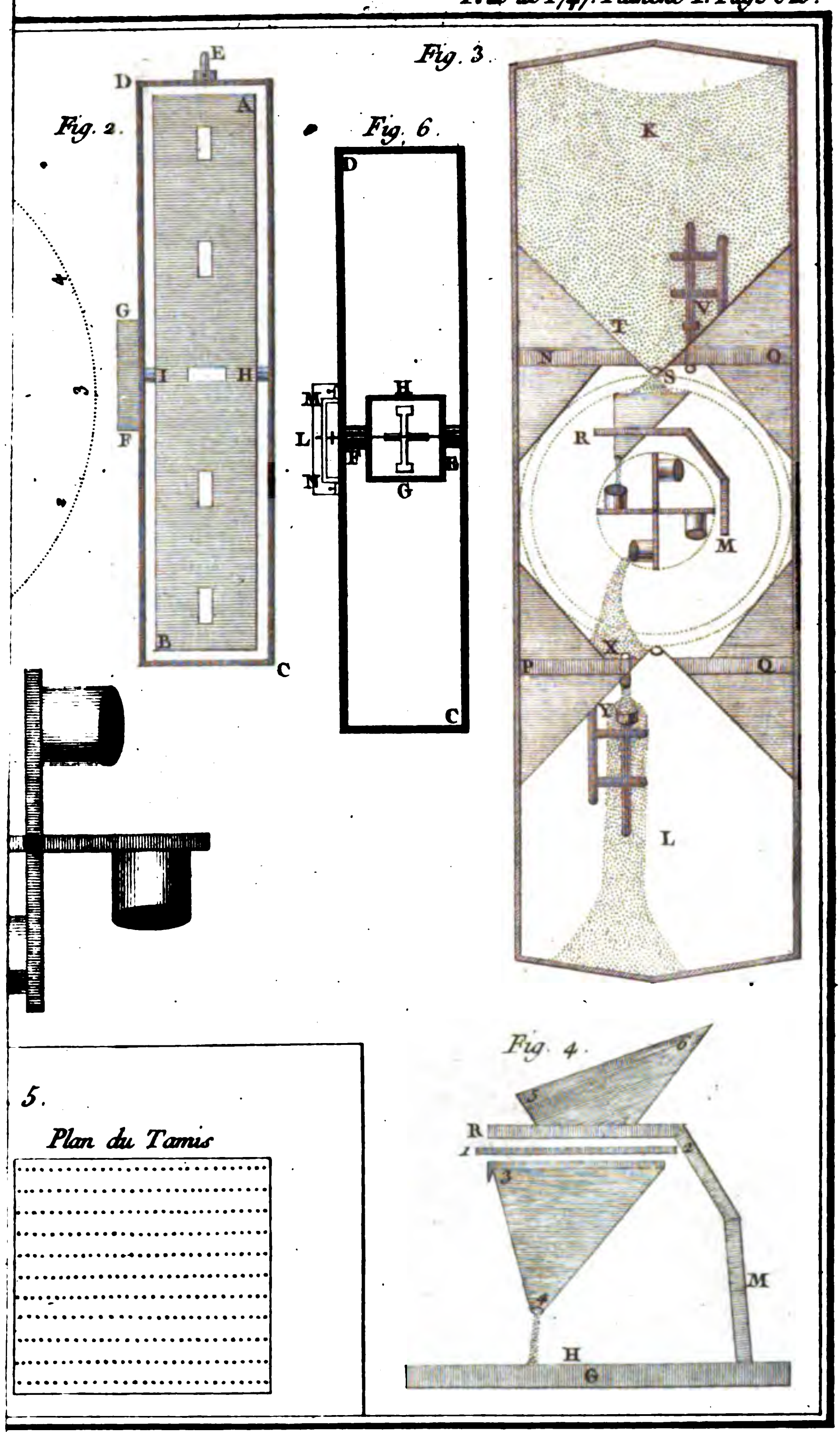
Si au contraire on voit une différence en avant ou en arriere, il faudra limer la coche d'un côté, & la *battre* un peu de l'autre pour l'étendre. On pourroit avoir des coches mobiles, qu'on arrêteroit avec des vis : mais cet expédient n'est bon que pour les mauvais ouvriers, les habiles gens y suppléeront par une division exacte.

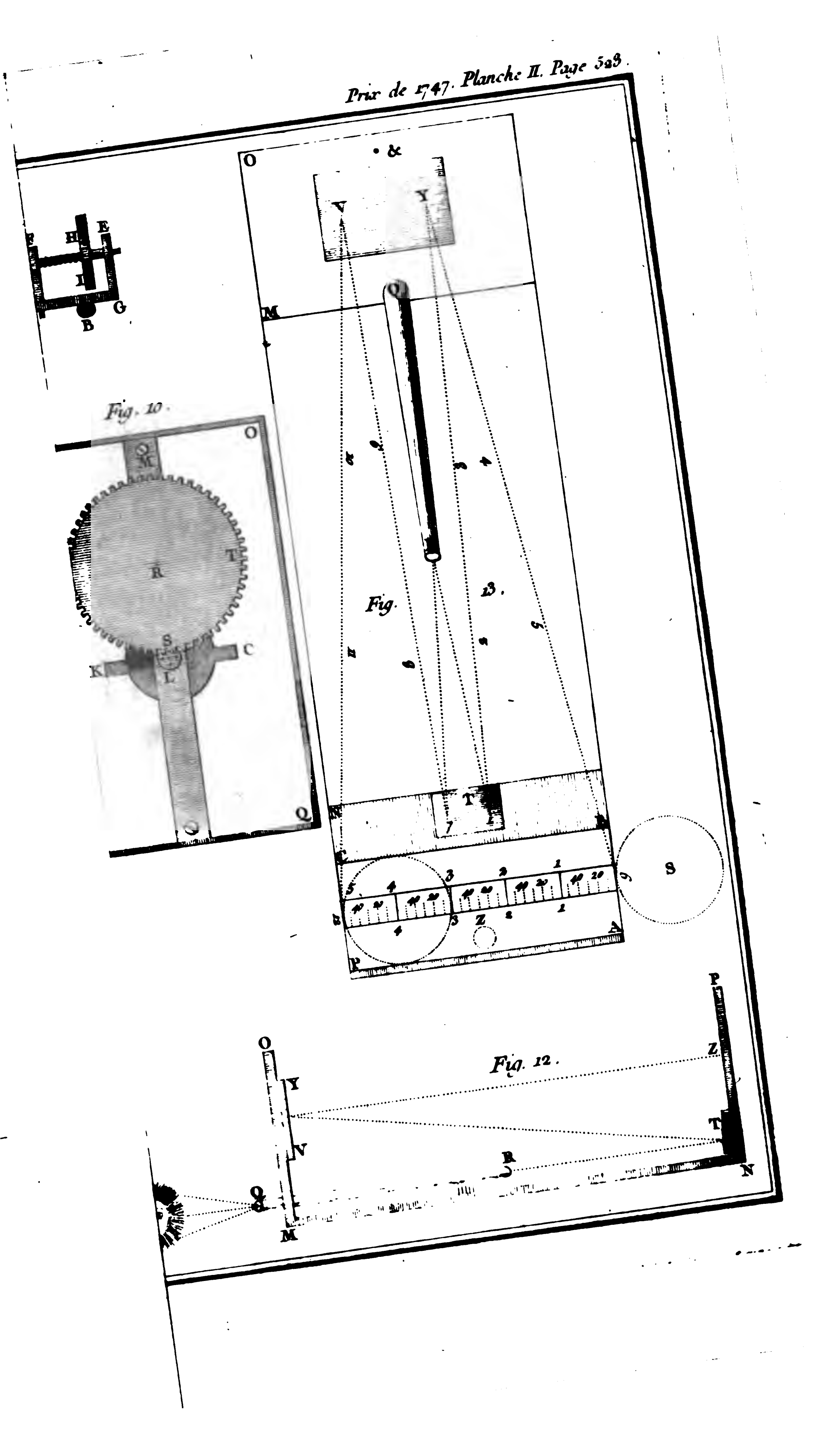
Après tout, l'inexactitude de ces divisions ne peut pas causer une grande erreur, parce que ce qui peut manquer à une coche, se trouvera sur l'autre ; tout comme la mauvaise exécution de cette piece ne doit pas diminuer le prix de l'*arrangement & de l'invention*.

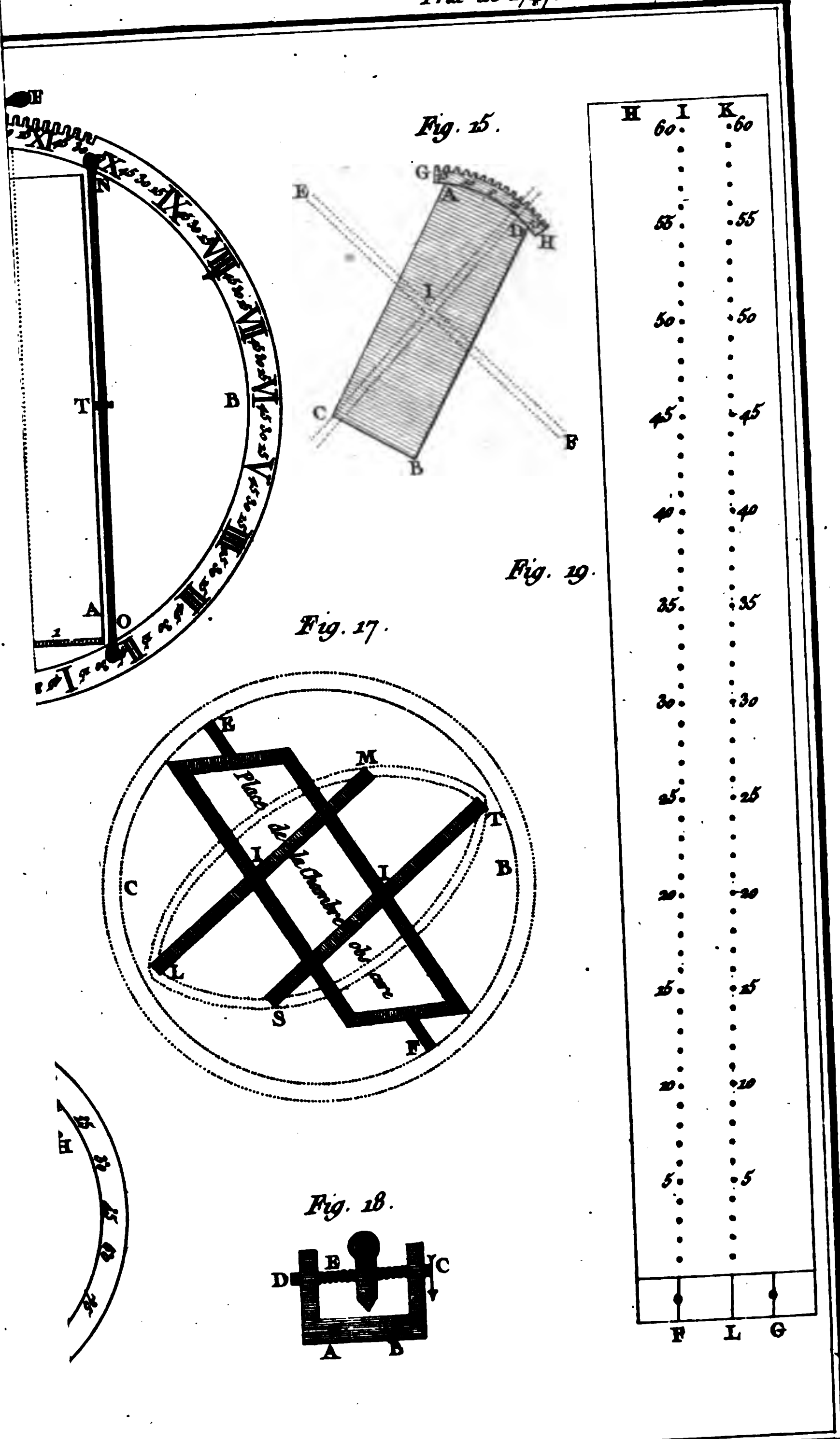
Emplacement de la Machine pour observer l'heure.

Cette machine n'a pas besoin d'être toute à découvert pour trouver l'heure. Il suffit que l'objectif de la lunette reçoive les rayons du Soleil ; tout le reste peut être à couvert, & du Soleil & du vent : elle peut même être entierement renfermée dans une chambre, pourvû que le Soleil y entre par une fenêtre ou une porte. On pourra donc sur mer, la placer sous le *gaillard*, ou sous la *dunette*, & par-tout ailleurs où le vent lui sera moins contraire.

Solution


Fig. 2.
E
D
A
G
I
H
F
B
C
Fig. 6.
D
H
M
L
F
E
N
G
C
Fig. 3.
K
V
T
N
S
O
R
M
X
P
Q
Y
L
5.
Plan du Tamis
Fig. 4.
6
5
R
1
2
3
M
4
H
G


Fig. 10.
Fig. 13.
Fig. 12.


Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Place de la Chambre obscure

Solution de deux cas où la Machine elle-même peut empêcher la Lunette de recevoir les rayons du Soleil.

Comme le Soleil change continuellement de déclinaison, il arrivera deux fois par an, que l'équateur se trouvera précisément entre le Soleil & la lunette, ce qui rendroit à chaque fois la machine inutile pendant deux ou trois jours.

Pour parer cet inconvénient, il faudra changer la suspension de place, la mettant *un* ou *deux* degrés en avant ou en arriere ; & pour corriger ce que ce changement aura produit, on reculera la déclinaison de la *chambre obscure*, d'autant de degrés qu'on aura avancé la suspension ; & lorsque le Soleil aura suffisamment changé de déclinaison, pour que l'équateur ne soit plus un obstacle, on remettra les choses à leur place. Voilà pour le premier cas.

Le second est moins considérable ; mais il peut arriver plus souvent. Pour rendre mes deux méridiens bien solides, j'ai cru devoir mettre une *entre-toise* de dix en dix degrés, ce qui fait 36 pour tout le tour. Il y en a quatre par conséquent, qui, en certains tems de l'année, pourront intercepter les rayons depuis onze heures & demie jusqu'à midi & demi *seulement*, tout le reste du jour étant libre: car la déclinaison étant de 23 degrés & demi de chaque côté, il y a deux entre-toises de part & d'autre qui seront dans le cas, (la cinquieme qui se trouve à l'intersection de l'équateur, ne devant pas être comptée).

Il n'est plus tems que je songe à réparer cette faute sur mon méridien, mais on pourra l'éviter dans un autre, en faisant ces quatre entre-toises différentes des autres,

c'est-à-dire, qu'on les fera en vis, & qu'on leur destinera deux places à chacune, pour pouvoir les changer suivant que le cas l'exigera, en conservant toûjours au méridien la solidité qu'il doit avoir.

Cependant on corrigera, *si l'on veut*, cet inconvénient, de la même maniere que le premier, en *avançant* la suspension, & *reculant* la déclinaison de pareil nombre de degrés.... Je dis *si l'on veut*, parce que pouvant avoir les heures avant & après midi, on peut se passer de celle-là.

FIN.









